# TS Exercices sur le raisonnement par récurrence

**Dans tous les exercices, on veillera à respecter scrupuleusement le protocole des récurrences.**

---

$\boxed{1}$ On considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 = \frac{1}{3}$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $u_n = \frac{n}{3^n}$.

On rappelle ci-dessous les **étapes à respecter**.

**Début :**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la phrase $P(n)$ : « ……………………………. ».

**Initialisation :**
Vérifions que $P(1)$ est vraie.
……………………………………………………………………

**Hérédité :**
Considérons un entier naturel $k \geq 1$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire ……………………

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire…………………………………..

**Conclusion :**
On a démontré que $P(1)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geq 1$, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

---

$\boxed{2}$ On considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout entier naturel $n$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leq u_n \leq 2$.

---

$\boxed{3}$ On considère la suite $u$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ pour tout entier naturel $n$.

1°) Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$.
Conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$.
2°) Démontrer cette conjecture par récurrence.

$\boxed{4}$ On considère la suite $u$ définie par la valeur de son premier terme $u_0$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$ pour tout entier naturel $n$.

1°) On suppose que $u_0 = 1$.
Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$.
Conjecturer la valeur de $u_n$ pour $n$ entier naturel quelconque.
Démontrer cette conjecture par récurrence.
2°) On suppose que $u_0 = 0$.
Calculer $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$, $u_5$.
Conjecturer une expression de $u_n$ pour $n$ entier naturel quelconque.
Démontrer cette conjecture par récurrence.

---

$\boxed{5}$ Pour tout entier naturel $n$ non nul on pose $S_n = 1 + 2 + ... + n = \sum_{p=1}^{p=n} p$.

1°) Combien cette somme comporte-t-elle de termes ?
2°) Calculer $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ directement.
3°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Pour l'hérédité, on observera que, $k$ étant un entier naturel fixé, on a $S_{k+1} = S_k + (k+1)$.

---

$\boxed{6}$ Pour tout entier naturel $n$ non nul on pose $S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \sum_{p=1}^{p=n} p^3$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a $S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

---

$\boxed{7}$ On considère le raisonnement suivant.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$ : « $4^n + 1$ est divisible par 3 ».

Considérons un entier naturel $k \geq 0$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Puisque $P(k)$ est vraie, il existe un entier naturel $q$ tel que $4^k + 1 = 3q$.
On a alors $4^{k+1} + 1 = 4 \times 4^k + 1 = 3 \times 4^k + 4^k + 1 = 3 \times 4^k + 3 \times q = 3(4^k + q)$.
Or $4^k + q$ est un entier naturel donc on en déduit que $4^{k+1} + 1$ est divisible par 3 et, par suite, que la phrase $P(k+1)$ est vraie.
On en déduit que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$.

**Ce raisonnement est-il exact ? Justifier.**

$\boxed{8}$ **Que peut-on penser du raisonnement suivant ?**

Pour $n$ entier naturel tel que $n \geq 2$, on définit la phrase
$P(n)$ : « $n$ points quelconques du plan sont toujours alignés ».
Vérifions que la phrase $P(2)$ est vraie.
Deux points du plan sont toujours alignés donc la phrase $P(2)$ est vraie.

Considérons un entier naturel $k \geq 2$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie.
Soit $A_1$, $A_2$, $A_3$,..., $A_{k+1}$ $k+1$ points du plan.
D'après la phrase $P(k)$, les $k$ premiers points $A_1$, $A_2$, $A_3$,..., $A_k$ sont alignés sur une droite $\Delta$ et, de même, les $k$ points $A_2$, $A_3$,..., $A_{k+1}$ sont alignés sur une droite $\Delta'$.
Les droites $\Delta$ et $\Delta'$ sont confondues car elles ont les points $A_2$, $A_3$,..., $A_k$ en commun.
Les $k+1$ points $A_1$, $A_2$, $A_3$,..., $A_{k+1}$ sont donc alignés sur $\Delta$.
Par conséquent, la phrase $P(k+1)$ est vraie.

On a démontré que $P(2)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k \geq 2$, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$.

---

$\boxed{9}$ On considère la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

On sait que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, la fonction dérivée $n$-ième de $f$ a pour expression $f^{(n)}(x) = 3^n \mathrm{e}^{3x}$.

---

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f$ sur $\mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

On sait que $f$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, la fonction dérivée $n$-ième de $f$ a pour expression $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.

$\boxed{11}$ On considère une phrase $P(n)$ portant sur un entier naturel $n$ telle que, si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k$, alors la phrase $P(k+1)$ l'est également.

On suppose qu'il existe un entier naturel $n_0$ tel que la phrase $P(n_0)$ soit vraie.
Quelles conclusions peut-on déduire avec certitude ?

(1) $P(n_0+1)$ est vraie.
(2) $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.
(3) $P(n_0-1)$ est fausse.
(4) $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \leq n_0$
(5) $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

---

$\boxed{12}$ Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p \times p! = (n+1)! - 1$.

---

$\boxed{13}$ On considère une fonction $f$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = [1\,;5]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| $x$ | 1 | 5 |
|---|---|---|
| Variation de $f$ | 2 $\nearrow$ | 4 |

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
1°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $1 \leq u_n \leq 5$.
2°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a $u_n \leq u_{n+1}$.