Exercices sur les limites de fonctions

1 Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe un réel *a* tel que la fonction $f : x \mapsto f(x) - x$ soit bornée sur l'intervalle $[a ; +\infty[$.

Calculer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand *x* tend vers $+\infty$.

2 Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{x+y}$.

1°) Démontrer que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} f(1)$.

2°) Démontrer que *f* est constante.

3 Soit *f* une fonction croissante définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que $f(2x) - f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

1°) Démontrer que $\dfrac{f(2^n)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Indication :

On pourra utiliser sans démonstration le théorème de Cesaro dont on rappelle ci-dessous l'énoncé.

> Soit (u_n) une suite numérique.
>
> Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, alors $\dfrac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

2°) Démontrer que $\dfrac{f(x)}{\ln x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

Indication : Utiliser le 1°) et revenir à la définition.

4 1°) Soit *g* une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique admettant une limite finie en $+\infty$.

Démontrer que *g* est constante.

2°) Soit *f* et *g* deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que *f* admette une limite finie en $+\infty$, *g* soit périodique et $f + g$ soit croissante.

Démontrer que *g* est constante.

5 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \cos x$ n'admet pas de limite en $+\infty$ à partir de la définition.

6 Soit *f* une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = l \quad (l \in \mathbb{R})$.

Que peut-on dire de *f* ?

Indication :

Soit x_0 un réel fixé. Considérer la suite (u_n) définie par $u_n = f(x_0 + nT)$ où *T* est une période de *f*.

7 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant les conditions suivantes :

① $\lim\limits_{+\infty} f = 0$;

② Pour tout couple $(x ; y)$ de réels strictement positifs, on a : $f(xf(y)) = yf(x)$.

1°) Démontrer que pour tout réel *x* strictement positif, $xf(x)$ est un point fixe de *f*.

2°) Soit *y* un point fixe de *f*.

Démontrer que pour tout réel *x* strictement positif et pour tout entier naturel *n*, on a : $f(xy^n) = y^n f(x)$.

En déduire que $y = 1$.

3°) Déterminer alors *f*.

8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On définit les applications f^+ et f^- par les relations :

$f^+(x) = \sup(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \sup(-f(x), 0)$.

1°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a :

$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

2°) Démontrer que *f* est continue si et seulement si f^+ et f^- sont continues.

3°) On suppose que f^+ et f^- sont croissantes et que *f* est bornée.

Démontrer que *f* admet une limite en $+\infty$.

9 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto (-1)^{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)}$

Démontrer en utilisant les suites que la fonction *f* n'admet pas de limite en 0.

10 Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, bornée sur l'intervalle [0 ; 1] et vérifiant :

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x+1) = f(x) + 1$.

1°) Démontrer que pour tout réel *x* positif ou nul, on a $f(x - \mathrm{E}(x)) = f(x) - \mathrm{E}(x)$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

11 Étudier le comportement de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^x}{\mathrm{E}(x)^{\mathrm{E}(x)}}$ en $+\infty$.

12 1°) Soit *n* un entier naturel fixé et *x* un réel fixé.

Démontrer que la suite $\left((\cos(n!\pi x))^{2m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge.

On note $l_n(x)$ sa limite.

2°) Démontrer que $l_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(x)$.

Expliciter $\lambda(x)$.

13 Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et *a* un réel appartenant à $\bar{\mathrm{I}}$.

On suppose que *f* admet une limite *l* en *a* $((l \in \mathbb{R}))$.

Démontrer que $|f|$ admet pour limite $|l|$ en *a* en utilisant la définition.

14 Soit α, β, γ trois réels donnés, deux à deux distincts, et a, b, c trois paramètres réels. On leur associe la fonction numérique f de variable réelle définie par $f(x)=\dfrac{ax^3}{x+\alpha}+\dfrac{bx^3}{x+\beta}+\dfrac{cx^3}{x+\gamma}$.

1°) Former une condition nécessaire et suffisante, portant sur a, b, c pour que la fonction f admette une limite finie en $+\infty$.
(Aucune autre étude concernant la fonction f n'est demandée.)

On posera éventuellement $g(x)=\dfrac{a\alpha^3}{x+\alpha}+\dfrac{b\beta^3}{x+\beta}+\dfrac{c\gamma^3}{x+\gamma}$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(\dfrac{\beta-\gamma}{x+\alpha}+\dfrac{\gamma-\alpha}{x+\beta}+\dfrac{\alpha-\beta}{x+\gamma}\right)\right]$.

15 Soit a un réel fixé. On considère la fonction f définie par $\varphi(x)=x^3+ax^2+ax+1$.

1°) Démontrer qu'il existe un réel A tel que pour tout réel $x\in\left]A\,;+\infty\right[$ on a : $\varphi(x)>0$.

2°) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\varphi(x)}-x\sqrt{x+a}\right)$.

16 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ illimité à droite.

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Si $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, alors $f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. »

17 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction qui vérifie pour tout réel x, $f(2x)=f(x)$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, la suite (u_n) définie par $u_n=f(2^n x)$ est constante.

2°) En déduire que si f admet une limite finie en $+\infty$, alors f est constante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

3°) Une telle fonction f est-elle nécessairement constante ?

18 Soit I un intervalle ouvert et a un élément fixé de I.

Soit f une fonction définie $\mathrm{I}\setminus\{a\}$ qui ne s'annule pas sur $\mathrm{I}\setminus\{a\}$ et qui vérifie $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\xrightarrow[x\to a]{}2$.

Le but de l'exercice est de démontrer que f admet une limite en a et de déterminer cette limite.

1°) Démontrer que f est strictement positive au voisinage de a.
2°) Démontrer que f est majorée au voisinage de a.
3°) En déduire f admet une limite en a et de déterminer cette limite.

19 Soit $f:\left[1\,;+\infty\right[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(1)=1$ et pour tout réel $t\in\left[1\,;+\infty\right[$,

$f'(t)=\dfrac{1}{\left[f(t)\right]^2+t^2}$.

Démontrer que f admet une limite finie ℓ inférieure ou égale à $\dfrac{\pi}{4}+1$ en $+\infty$.

20 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=\sin x$ si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Étudier la limite de f en tout réel.

21 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=x^2$ si $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Déterminer les éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ en lesquels f admet une limite et préciser la limite en ces éléments.

22 Soit u une application définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que si $u(x)\left[1-u(x)\right]\xrightarrow[x\to a]{}\dfrac{1}{4}$ (a est un réel appartenant à I ou une extrémité de I), alors u admet une limite en a (à déterminer).

23 1°) On considère la suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0=a$ où a est un réel fixé et la relation de récurrence $x_{n+1}=\dfrac{x_n-1}{2}$.

Exprimer x_n en fonction de n.

Indication : On pourra considérer la suite (y_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $y_n=x_n+1$.

2°) Le but de cette question est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) pour tout réel x, on ait $f(2x+1)=f(x)$;

(ii) f admet une limite finie ℓ en -1.

a) Soit a un réel fixé. On considère la suite (x_n) définie au 1°).

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $f(x_n)=f(a)$.

b) En déduire la valeur de $f(a)$.

Conclure.

24 Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x\in\mathrm{I}$, on a : $0\leqslant u(x)\leqslant 1$ et $0\leqslant v(x)\leqslant 1$.

Démontrer que si $u(x)v(x)\xrightarrow[x\to a]{}1$ (a est un réel appartenant à I ou une extrémité de I), alors $u(x)\xrightarrow[x\to a]{}1$ et $v(x)\xrightarrow[x\to a]{}1$.

25 On considère la fonction $f:x\mapsto\dfrac{x}{x+\mathrm{E}(x)}$.

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2°) Déterminer $f(\mathbb{R}_+^*)$, $f(\mathbb{R}_-^*)$ et $f(\mathbb{R})$.

26 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=-\dfrac{1}{x}$ sinon.

1°) Démontrer que f n'admet pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$ en tout réel x_0.

2°) Démontrer que f n'est monotone sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$.

3°) Calculer $f\circ f$. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

27 La fonction $f:x\mapsto\sin\dfrac{1}{x}$ admet-elle une fonction en 0 ?

28 Étudier la limite en tout réel de la fonction $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Généraliser à la fonction indicatrice d'une partie A de $\mathbb{R}$ telle que A et $\mathbb{R}\setminus$A soient denses dans $\mathbb{R}$.

Corrigé

$\boxed{4}$ $f+g$ est croissante donc tend vers une limite finie ou infinie.

$f+g \longrightarrow +\infty \Rightarrow g \longrightarrow +\infty$

$f+g \longrightarrow L' \Rightarrow g \longrightarrow +\infty$

$\boxed{5}$ absurde si $\cos x \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, alors $-1 \leqslant l \leqslant 1$; l est finie.

Considérer l'intervalle $\left[l-\frac{1}{4}\,;l+\frac{1}{4}\right]$.

$\boxed{6}$ **Sur une ancienne feuille j'avais noté au stylo rouge :**

Soit a et b deux réels.

$f(a+nT) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $f(b+nT) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

Donc $f(a)=f(b)$.

$\boxed{7}$ 2°) On utilise la caractérisation séquentielle de la limite.

Pour justifier que $y<1$ est impossible, exploiter l'égalité : $f\left(\frac{1}{y^n}y^n\right)=y^n f\left(\frac{1}{y^n}\right)$ soit $f(1)=y^n f\left(\frac{1}{y^n}\right)$.

$\boxed{9}$ On considère la suite définie par $u_n=n$.

$\left(f(u_n)\right)$ n'a pas de limite donc f n'a pas de limite en 0.

Il est inutile de considérer deux suites ; une seule suffit.

$\boxed{11}$ On prend deux suites : $u_n=n$ et $v_n=n+\frac{1}{2}$.

La fonction f n'a pas de limite en + ∞.

$\boxed{12}$ 1°) Convergence d'une suite géométrique.

2°)

$$l_n(x) \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow 1 \end{array}$$

$n!\pi x = k\pi$

L'égalité $n!x=k$ est vraie à partir d'un certain rang si x est rationnel.

$\boxed{13}$ Utiliser la définition de la limite d'une fonction en un réel.

Utiliser l'inégalité $\big|\,|a|-|b|\,\big| \leqslant |a-b|$.

Question supplémentaire possible : la réciproque de cette propriété est-elle vraie ?

La réponse est non. Considérer la fonction $f : x \mapsto \frac{|x|}{x}$ en 0.

$\boxed{13}$ 1°) Autre méthode (on ne pose pas $g(x)$:

On décompose $f(x)$ en éléments simples.

On utilise l'algorithme de Horner.

1	0	0	0
1	$-\alpha$	α^2	$-\alpha^3$

$X^3=(X+\alpha)(X^2-\alpha X+\alpha^2)-\alpha^3$

$\frac{X^3}{X+\alpha}=X^2-\alpha X+\alpha^2-\frac{\alpha^3}{X+\alpha}$

$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a\alpha+b\beta+c\gamma=0 \end{cases}$

$\boxed{16}$ La proposition est fausse. On exhibe un contre-exemple.

$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}$

$f'(x)=2\cancel{x}\cos(x^2)\times\frac{1}{\cancel{x}}+\sin(x^2)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2}$

$\boxed{17}$ 3°) Non : fonction indicatrice de $\mathbb{Z}$ (ou la fonction indicatrice de n'importe quel sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ vérifiant $x\in A \Rightarrow 2x\in A$).

$\boxed{21}$

● Limite en un réel distinct de 0 et 1.

Soit x un réel distinct de 0 et 1.

Il existe deux suites (x_n) et (y_n) de réels qui tendent vers x telles que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_n\in\mathbb{Q}$ et $y_n\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

$f(x_n)=x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $f(y_n)={y_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$

$x\neq x^2$ donc f n'admet pas de limite en x.

● Limite en 0 :

$|f(x)| \leqslant |x|$

● Limite en 1 :

$|f(x)-1|=|x-1|$ ou $|f(x)-1|=|(x-1)(x+1)|$ donc $|f(x)-1|\leqslant 2|x-1|$

On fait ensuite $x\to 1$.

28

Exercice écrit le 8 mai 2020

On dit que la fonction indicatrice des rationnels est totalement discontinue.

Questions de cours

1 Définition de la continuité d'une fonction en un réel (deux définitions : définition avec les limites et définition « epsilonesque »).
Définition de la continuité d'une fonction sur un intervalle.
Définition de la continuité uniforme sur un intervalles. Lien entre continuité et uniforme continuité.

2 Caractérisation séquentielle de la continuité.

3 Limite d'une fonction monotone.

4 Limite d'une composée.

5 Limite d'une somme de fonctions, d'un produit, d'un quotient. Faire l'une des trois démonstrations.

6 Unicité de la limite.

7 Toute fonction qui admet une limite est localement bornée.

8 Traduire par une phrase quantifiée la phrase « f est uniformément continue sur D ».
Traduire par une phrase quantifiée la phrase « f n'est pas uniformément continue sur D ».
Donner un exemple de fonction uniformément continue et un exemple de fonction qui n'est pas uniformément continue.

9 1°) Soit f une fonction définie sur un voisinage de a $(a\in\mathbb{R})$.
Donner la définition de $\lim\limits_{a} f = l$ $(l\in\mathbb{R})$ sous forme d'une phrase quantifiée.
Donner la définition de $\lim\limits_{a} f = +\infty$ sous forme d'une phrase quantifiée.
Donner la définition de $\lim\limits_{a} f = -\infty$ sous forme d'une phrase quantifiée.

2°) Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$.
Donner la définition de $\lim\limits_{+\infty} f = l$ $(l\in\mathbb{R})$, $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ sous forme de phrases quantifiées.

10 Caractérisation séquentielle des limites.

11 Limite du produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0.