Exercices sur les propriétés globales des fonctions numériques

1 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{x^2+1}$.

1°) Déterminer le sens de variation de la fonction $x \mapsto x^2+1$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ et sur l'intervalle $[-\pi\,;\,0]$.

2°) Démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2 Soit f et g deux fonctions numériques définies sur un intervalle I.

Pour tout réel $x \in I$, on pose $M(x) = \max\big(f(x)\,;g(x)\big)$ et $m(x) = \min\big(f(x)\,;g(x)\big)$.

Démontrer que si f et g sont croissantes sur I, alors les fonctions M et m sont croissantes sur I.

3 1°) Soit u une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose $f = u \circ \ln$.

Démontrer que si f est paire, alors pour tout réel $x>0$ on a : $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2°) Soit f une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel $x>0$ on ait $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Étudier la parité de la fonction $f \circ \exp$.

En déduire qu'il existe une fonction paire u définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f = u \circ \ln$.

4 On considère la fonction $f : x \mapsto x\cos x$.

Calculer $f(n\pi)$ où n est un entier relatif quelconque.

La fonction f est-elle majorée sur $\mathbb{R}$?

La fonction f est-elle minorée sur $\mathbb{R}$?

5 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$ et $f \circ f(x) = x$ pour tout réel x.

1°) Démontrer que la fonction f est bijective.

2°) Soit a un réel tel que $f(a) \neq a$.

Démontrer que f n'est pas croissante sur le segment d'extrémités a et $f(a)$.

3°) On suppose que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, ou bien f est strictement décroissante, ou bien $f(x) = x$ pour tout réel x.

4°) Déterminer une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ strictement décroissante telle que pour tout réel x on ait $g \circ g(x) = x$.

6 On considère deux applications f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que l'on ait :

H_1 : f n'est pas identiquement nulle ;

H_2 : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$;

H_3 : $\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$.

Démontrer l'existence de $\mathrm{M} = \sup\limits_{\mathbb{R}} f$ et que M est strictement positif puis que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |g(x)| \leqslant 1$.

7 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin x$.

La fonction f est-elle minorée sur $\mathbb{R}$? majorée sur $\mathbb{R}$?

8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{x^2-a^2}$ où a est un réel strictement positif fixé.

1°) Déterminer sans utiliser la dérivée le sens de variation de f sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

2°) Démontrer que f est bornée sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$.

9 Soit n un entier naturel quelconque non nul fixé. On considère la fonction f définie par
$f(x) = \sqrt{x+n} + \sqrt{x+n-1} + \ldots + \sqrt{x} + \ldots + \sqrt{x-n+1} + \sqrt{x-n} - (2n+1)\sqrt{x}$.
Déterminer l'ensemble de définition de f et, sans utiliser la dérivée, son sens de variation.

10 **Rappels**

1°) Définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et B une partie de F.
On appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble noté $f^{-1}(\mathrm{B})$ défini par $f^{-1}(\mathrm{B}) = \{x \in \mathrm{E} \,/\, f(x) \in \mathrm{B}\}$.

(On notera que, malgré la notation, on ne suppose pas que f est bijective).

2°) Caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$

Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$.

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall (x\,;y) \in \mathrm{I}^2 \quad (x<z<y \Rightarrow z \in \mathrm{I})$.

Soit f une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout intervalle J de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathrm{J})$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$.

Le vendredi 16 avril 2021

Soit f une fonction monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réel a, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, éventuellement vide ou réduit à un singleton.

11 Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f définies sur l'intervalle $I = [0\,;1]$ à valeurs dans I vérifiant la condition (C) suivante : pour tout couple (x, y) d'éléments de I, $|f(x) - f(y)| \geqslant |x-y|$.

1°) On suppose que f vérifie la condition (C).
Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ et $f(1)$.

2°) On suppose que $f(0) = 0$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \geqslant x$.

b) Exploiter l'inégalité $|f(x)-1| \geqslant |x-1|$ pour déterminer f.

3°) On suppose que $f(0) = 1$.

Déterminer f. On pourra s'intéresser à la fonction g définie par $g(x) = 1 - f(x)$.

12 Donner un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait $(f \circ f)(x) = [f(x)]^2$.

13 Déterminer les fonctions affines f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

14 Déterminer les fonctions affines f telles que, pour tout réel x, on ait $(f \circ f)(x) = 4x + 3$.

15 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $f \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

16 On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{x - \mathrm{E}(x)}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2°) Démontrer que f est périodique.

17 1°) Soit f une fonction définie sur un intervalle I (non vide de $\mathbb{R}$), à valeurs dans I, strictement croissante.

On pose $\mathrm{A} = \{x \in I \,/\, f(x) = x\}$ et $B = \{x \in I \,/\, f \circ f(x) = x\}$.

Démontrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

2°) Discuter le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{a\,\mathrm{e}^{ax}} = x$ (a est un réel non nul).

18 Soit f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(\alpha) = 0$ avec $\alpha > 0$ et telle que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ soit croissante.

Démontrer que f est la fonction identiquement nulle sur $[\alpha\,;+\infty[$.

19 Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont croissantes et paires.

20 1°) Démontrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que pour tout réel x on ait $f(\mathrm{ch}\, x) = \mathrm{e}^x$.

2°) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que tout réel x on ait $f(\mathrm{e}^x) = \mathrm{ch}\, x$.

Préciser le nombre de solutions.

3°) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles que tout réel x on ait $f(\mathrm{e}^x) = \mathrm{ch}\, x$.

Préciser le nombre de solutions. Y a-t-il des solutions continues sur $\mathbb{R}_+$?

21 On pose $\mathrm{I} = \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On considère la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{1+x^2}}{\cos x}.$$

Déterminer le sens de variation de f sur I.

22 Soit E l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{2} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$ où A_0, A_1, B_1, A_2, B_2 sont des constantes réelles.

On note I l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 4.

1°) Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\dfrac{x-a}{2} \sin\dfrac{x-b}{2} \sin\dfrac{x-c}{2} \sin\dfrac{x-d}{2}$ où a, b, c et d sont quatre réels.

Démontrer que f appartient à E.

2°) Soit x_0, x_1, x_2, x_3 et x_4 des réels tels que l'on ait $0 < x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \pi$.

On considère les fonctions t_k pour $k \in I$ définies par $t_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{4} \sin\dfrac{x - x_j}{2}$.

a) Calculer $t_k(x_i)$ où i et k sont deux entiers naturels de I tels que $i \neq k$.

Démontrer que $t_k(x_k) \neq 0$ pour $k \in I$.

b) Démontrer que $t_k \in E$ pour tout entier naturel $k \in I$.

c) Soit y_0, y_1, y_2, y_3 et y_4 des réels donnés.

Démontrer qu'il existe une fonction $T \in E$ telle que $T(x_k) = y_k$ pour tout entier naturel $k \in I$.

23 On cherche toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

Pour tout couple (x, y) de réels on a : $|f(x) + f(y)| = |x + y|$.

Soit f une fonction solution du problème. Que peut valoir $f(0)$?

Démontrer que pour tout réel x, on a : $|f(x)| = |x|$.

Démontrer que l'on a : pour tout réel x $f(x) = x$ ou pour tout réel x $f(x) = -x$.

24 1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{E}(x)}{x}$.

Démontrer que f est majorée sur $]0\,;+\infty[$. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R}^*$?

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x - \mathrm{E}(x)}{x(x+1)}$.

Démontrer que g est majorée sur $]0\,;+\infty[$. Est-ce encore vrai sur $\mathbb{R} \setminus \{0\,;-1\}$?

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x - \mathrm{E}(x)}{\sqrt{x}}$.

Démontrer que h est majorée sur $]0\,;+\infty[$.

25 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{b-x}$ où a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Démontrer que f établit une bijection de l'intervalle $]a\,;b[$ dans $\mathbb{R}$.

Donner l'expression de f^{-1}.

26 Déterminer le sens de variation de la fonction tangente sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Écrire $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

27 Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 1, telle que pour tout $x \in [0\,;1]$ $\quad f(x) = x^2$.
Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \in [n\,;n+1]$ où n est un entier relatif quelconque.

28 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+6} = 5$.

29 **Notion de période oblique**
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :

il existe un couple (T, L) de réels avec $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x) + L$.

Démontrer que la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est globalement invariante par la translation de vecteur $T\vec{i} + L\vec{j}$. En déduire un intervalle d'étude de f.

Exemples : $f(x) = \mathrm{E}(x)$; $f(x) = \mathrm{E}(2x)$; $f(x) = (x - \mathrm{E}(x))^2 + \mathrm{E}(x)$.

On suppose que $T = L$. Démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est périodique.

30 Déterminer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait : $2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1$.

31 Déterminer la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ telle que pour tout réel x non nul, on ait : $f(x) + 2f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x^3$.

32 Étant donnés une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et un réel a, déterminer la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, on ait : $2f(x-a) + 3f(a-x) = g(x)$.

33 **Fonctions définies de manière implicite**
Pour tout réel x positif ou nul, on note :
$f(x)$ la somme des entiers naturels inférieurs ou égaux à x ;
$g(x)$ le produit des entiers naturels inférieurs ou égaux à x.
Déterminer l'expression explicite des fonctions f et g.

34 voir exercice **6**
Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- f n'est pas identiquement nulle ; hypothèse non utile pour la question que j'ai écrite
- $f(0) = 1$
- $\forall t \in \mathbb{R} \quad |f(t)| \leqslant 1$
- $\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$

Démontrer que $\forall y \in \mathbb{R} \quad |g(y)| \leqslant 1$.
Idée : $\forall y \in \mathbb{R} \quad f(y) + f(-y) = 2g(y)$

35 On considère une fonction croissante f de [0 ; 1[dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel $a \in \,]0\,;1[$ tel que pour tout réel $x \in \,]0\,;1]$ on ait : $f(x) = f(ax)$.
1°) Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $f(a^n) = f(1)$.
2°) Soit x un réel fixé de l'intervalle $]0\,;1]$.
Démontrer qu'il existe un entier naturel p tel que $a^p \leqslant x$.
3°) Démontrer que f est constante sur l'intervalle $]0\,;1]$.

36 Démontrer que toute fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$ est constante.

37 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a\,;b]$ $(a < b)$ à valeurs dans I croissante.
Le but de l'exercice est de démontrer que f admet un point fixe dans I. Pour cela, on considère l'ensemble $E = \{x \in I \,/\, f(x) \geqslant x\}$.
1°) Démontrer que E admet une borne supérieure c. Justifier le fait que $c \in I$.
2°) On suppose que $c = b$. En déduire le résultat annoncé.
3°) On suppose que $c \neq b$. Démontrer que $f(c) \geqslant c$ puis que $f(c) \leqslant c$. Conclure.
4°) Le résultat de l'exercice subsiste-t-il si l'on suppose que f décroissante sur I ?

38 À tout réel $a > 0$ on associe la fonction $f_a : x \mapsto \ln\left(\dfrac{ax}{x-1}\right)$ et l'on note $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition de f_a.
2°) Démontrer que $\mathcal{C}_a$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par la translation de vecteur $(\ln a)\vec{j}$.

39 On considère la fonction $f : x \mapsto |\,x\,|$.
Déterminer $f \circ f$.

40 À tout réel $k > 0$ on fait correspondre la fonction $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
En observant que $f_k(x) = f_1(x\sqrt{k})$, démontrer que $\mathcal{C}_k$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par une affinité.

41 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x+1} - 1\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On note r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Démontrer que l'image de $\mathcal{C}$ par r est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

42 On considère la fonction $f : x \mapsto \ln x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Déterminer l'image de $\mathcal{C}$ par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{43}$ Soit a un réel non nul.

On considère la fonction $f_a : x \mapsto a\mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et l'on note $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Recopier et compléter la phrase suivante par une application du plan dans lui-même correctement définie : « $\mathcal{C}_a$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par …… ».

2°) On va démontrer que, lorsque a est strictement positif, $\mathcal{C}_a$ se déduit de $\mathcal{C}_1$ par une autre application.

On suppose donc que $a > 0$.

En observant que pour tout réel x, on a $f_a(x) = f_1(x + \ln a)$, répondre la question.

$\boxed{44}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que la fonction f établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

À l'aide de la formule de Cardan, déterminer l'expression de sa bijection réciproque.

$\boxed{45}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left[1 - \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2\right]$.

2°) On considère la fonction $u : x \mapsto \dfrac{x-1}{x+1}$.

Démontrer que pour tout réel $x \neq -1$, on a : $u(x) = 1 - \dfrac{2}{x+1}$.

En déduire le sens de variation de u puis de f.

$\boxed{46}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1°) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}$.

2°) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$ à l'aide des composées.

$\boxed{47}$ On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = \sqrt{1-x^2} + x$ et $y = \sqrt{1-x^2} - x$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont symétriques par rapport à O.

2°) Démontrer que la courbe Γ d'équation $x^2 + (x+y)^2 = 1$ est la réunion de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

$\boxed{48}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x+3}$ et $g : x \mapsto -3 - \dfrac{1}{2-x}$. On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni d'un repère normé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

$\boxed{49}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(\alpha \mathrm{E}(x))$.

Proposer une valeur de α telle que f soit constante sur $\mathbb{R}$.

Est-il possible de trouver une valeur de α non nulle telle que f prenne un nombre fini de valeurs ?

$\boxed{50}$ Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On pose $\mathrm{A}' = \{-x, x \in \mathrm{A}\}$.

1°) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1_{\mathrm{A}}(-x) = 1_{\mathrm{A}'}(x)$.

2°) On dit que A est symétrique par rapport à 0 lorsque $\mathrm{A}' = \mathrm{A}$.

Exemple : $\mathbb{Q}$

Démontrer que A est symétrique par rapport à 0 $\Leftrightarrow$ 1_{A} est paire.

$\boxed{51}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+x^2}$.

Déterminer le maximum global de f sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{52}$ Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble A à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f et g admettent toutes deux un maximum atteint en un même élément a de A.
On suppose que g est à valeurs positives ou nulles.
Démontrer que fg admet un maximum sur A.

$\boxed{53}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1°) Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle à préciser.
2°) On note g la bijection réciproque. Quel est le sens de variation de g ?
3°) Déterminer l'expression de g.

$\boxed{54}$ 1°) Démontrer que le polynôme $x^2 - x + 1$ est non nul pour tout réel x.

2°) Déterminer les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x on ait : $f(x) + xf(1-x) = 1 + x$.

$\boxed{55}$ Démontrer qu'il n'existe pas d'intervalle de $\mathbb{R}$ stable par la fonction ln.

$\boxed{56}$ À tout réel m strictement positif on associe la fonction $f_m : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^x + m\right)$ définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Vérifier que pour tout réel x, on a $f_m(x) = f_1(x - \ln m) + \ln m$.

En déduire que $\mathcal{C}_m$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par une transformation du plan que l'on précisera.

2°) Démontrer que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels strictement positifs on a $f_a \circ f_b = f_{a+b}$.

$\boxed{57}$ À tout réel a strictement positif on associe la fonction $f_a : x \mapsto \sqrt{x^2 + a}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels strictement positifs on a $f_a \circ f_b = f_{a+b}$.

Soit a un réel strictement positif et n un entier naturel.
Donner l'expression de $\underbrace{f_a \circ f_a \circ \ldots \circ f_a}_{n \text{ fois}}$.

À tout réel a strictement positif on associe la fonction $f_a : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^x + a\right)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels strictement positifs on a $f_a \circ f_b = f_{a+b}$.

58 Pour tout réel a on note $\mathcal{C}_a$ la courbe d'équation $y=\sqrt{x^2+a^2}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.
Démontrer que pour tout réel a strictement positif $\mathcal{C}_a$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par une homothétie du plan que l'on précisera.
Démontrer que pour tout réel a strictement négatif $\mathcal{C}_a$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par une autre homothétie du plan que l'on précisera.

59 À tout couple (a,b) de réels strictement positifs on associe la fonction $f_{a,b}: x \mapsto \ln\left(a\mathrm{e}^{x}+b\mathrm{e}^{-x}\right)$ et on note $\mathcal{C}_{a,b}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathcal{C}_{a,b}$ est l'image de $\mathcal{C}_{1,1}$ par la translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{b}{a};\frac{1}{2}\ln(ab)\right)$.

En déduire que si le repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthogonal, alors toutes les courbes $\mathcal{C}_{a,b}$ possèdent un axe de symétrie.

60 À tout couple (a,b) de réels strictement positifs on associe la fonction $f_{a,b}: x \mapsto \ln\left(a\mathrm{e}^{x}+b\right)$ et on note $\mathcal{C}_{a,b}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

Démontrer que $\mathcal{C}_{a,b}$ est l'image de $\mathcal{C}_{1,1}$ par la translation de vecteur $\vec{u}\left(\ln\frac{b}{a};\ln b\right)$.

61 Soit p un entier naturel.
Étudier la parité et la périodicité des fonctions $f: x \mapsto \cos^{p} x$ et $g: x \mapsto \sin^{p} x$.

62 Pour tout réel k strictement positif on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=\mathrm{e}^{kx}$ et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.
Étudier la position relative de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k'}$ pour $k<k'$.

Idem $f_k(x)=\mathrm{e}^{-kx}$

63 1°) On pose $I=[0,1]$. Soit $f: I \to I$ une fonction croissante.
a) On pose $\mathrm{A}=\left\{x\in I \,/\, x\leqslant f(x)\right\}$.
Démontrer que A possède une borne supérieure α.
b) Démontrer que $f(\alpha)$ est un majorant de A.
c) En déduire que α est un point fixe de f.
d) f admet-elle encore un point fixe si on ne la suppose plus croissante mais décroissante ?
2°) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.
Démontrer que f admet un unique point fixe.
3°) Soit f et g deux fonctions croissantes de I dans I telles que $f\circ g = g\circ f$.
Démontrer que f et g ont un point fixe commun. On pourra considérer l'ensemble $\mathrm{A}=\left\{x\in I \,/\, x\leqslant f(x) \text{ et } g(x)\leqslant x\right\}$ et s'inspirer de la question 1°).

64 1°) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x+1)=f(x)+1$.
Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x on a $f(x+n)=f(x)+n$.
Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ la fonction $\varphi_n : x \mapsto f\left(\frac{f(nx)}{n}\right)-f(x)$ est périodique de période 1.

2°) Application :
Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ on a : $\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right)=\mathrm{E}(x)$.

65 1°) Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x+1)=f(x)+1$.
Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x on a $f(x+n)=f(x)+n$.
Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ la fonction $\varphi_n : x \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right)\right)-f(nx)$ est périodique de période $\frac{1}{n}$.
2°) Application :
Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$ on a : $\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{E}\left(x+\frac{k}{n}\right)=\mathrm{E}(nx)$.

66 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période n où n est un entier naturel supérieur à 1.
Démontrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} f(x+k)$ est périodique de période 1.

67 Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T où T est un réel strictement positif.
Démontrer que pour tout entier relatif k et tout réel x on a $f(x+k\mathrm{T})=f(x)$.

68 Soit f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques admettant respectivement pour périodes T et T' où T et T' sont des réels strictement positifs.
On suppose que $\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}}$ est un nombre rationnel.
Démontrer que les fonctions $f+g$ et fg sont périodiques.

69 À tout réel m strictement positif on associe la fonction $f_m: x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+m}}$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.
Vérifier que pour tout réel x, on a $f_m(x)=f_1\left(\frac{x}{\sqrt{m}}\right)$.
En déduire que $\mathcal{C}_m$ est l'image de $\mathcal{C}_1$ par une transformation du plan que l'on précisera.

70 À tout réel k on associe la fonction $f_k: x \mapsto x(\ln x+k)$ définie sur $\mathbb{R}$ et on note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.
Démontrer que $\mathcal{C}_k$ est l'image de $\mathcal{C}_0$ par une transformation homothétie de centre O que l'on précisera.

71 On considère une fonction $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$. On suppose que u établit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.
À tout réel m positif ou nul on associe la fonction $f_m: x \mapsto u^{-1}\left[u(x)+m\right]$ définie sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que pour tout couple $(a\,;b)$ de réels positifs ou nuls on a $f_a\circ f_b=f_{a+b}$.

72 Soit *f* une fonction de période T et *a* un réel non nul.
Démontrer que la fonction $g : x \mapsto f(ax)$ est périodique.

Réponses

6 $\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(x)g(y)| \leqslant \mathrm{M}$

On utilise la caractérisation séquentielle d'une borne supérieure.
Soit (x_n) une suite de réels tels que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{M}$.

11 $f(x)=x$ ou $f(x)=1-f(x)$ (source : Transmath 1ère S, exercices du chapitre 1).

15 Soit *a* et *b* tels que $a<b$.
$(f\circ f\circ f)(a) > (f\circ f\circ f)(b)$
$(f\circ f)[f(a)] > (f\circ f)[f(b)]$
$f(a) > f(b)$

16 1°) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; 2°) *f* est périodique de période 2

17 1°) Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, strictement croissante.
Démontrer que $\{x\in \mathrm{I} \,/\, f\circ f(x)=x\} = \{x\in \mathrm{I} \,/\, f(x)=x\}$.
2°) Discuter le nombre de solutions de l'équation $\mathrm{e}^{a\,\mathrm{e}^{ax}} = x$ (*a* est un réel non nul).

$\mathrm{A} = \{x\in\mathbb{R} \,/\, \mathrm{e}^{ax}=x\}$

$a>0$

$\mathrm{e}^{ax}=x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}=a$

$f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

$a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ e solution

$a>\dfrac{1}{e}$ aucune solution

$a=0$ 1 solution

$a\in \left]0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$ 2 solutions

28 On minore chaque racine carrée et on montre ainsi qu'il n'y a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

33 **Variantes possibles**

Somme des entiers naturels pairs, impairs, des carrés parfaits, des cubes parfaits.

37

Le dimanche 17 octobre 2021

MPSI Nîmes Lycée Daudet 2021-2022

Exercice 10. Théorème du point fixe de Knaster-Tarski.
Soit f : [0, 1] → [0, 1] croissante (attention, on ne suppose pas que f est continue !).
On appelle point fixe de f un réel x0 tel que f(x0) = x0.
1. Faire un dessin avec une fonction f discontinue (mais convenable).
2. Montrer que l’ensemble A = {x ∈ [0, 1], f(x) □ x} a une borne inférieure α. Compléter votre dessin avec A et α. Montrer que α est un point fixe de f.
3. Montrer que l’ensemble B = {x ∈ [0, 1], f(x) □ x} a une borne supérieure β. Compléter votre dessin avec B et β. Montrer que β est un point fixe de *f*.
4. En déduire que toute application croissante de [0, 1] dans [0, 1] a un plus grand et un plus petit points fixes.

Remarque : Cet exercice a une généralisation importante en informatique théorique qui est que toute application d’un treillis complet dans lui-même a toujours un plus grand et un plus petit points fixes.

41 $x'=-y$ et $y'=x$

$y=\ln x$
$-x'=\ln y'$
$y'=\mathrm{e}^{-x'}$

54

12 septembre 2021

Jérémy Legendre ECG maths appliquées aux Chartreux
Analyse :
… $f(x)+xf(1-x)=1+x \quad \mathrm{L}_1$

$f(1-x)+(1-x)f(x)=2-x \quad \mathrm{L}_2$

$\mathrm{L}_1-x\mathrm{L}_2 \;\; f(x)+\left(x^2-x\right)f(x)=1+x-x(2-x)$
$\left(x^2-x+1\right)f(x)=x^2-x+1$

On trouve $f=$ fonction constante égale à 1.

Synthèse :

La fonction constante égale à 1 vérifie la condition.

64
1°)

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x+1) &= f\left(\frac{f(nx+n)}{n}\right)-f(x+1)\\
&= f\left(\frac{f(nx)+n}{n}\right)-f(x)-1\\
&= f\left(\frac{f(nx)}{n}+1\right)-f(x)-1\\
&= f\left(\frac{f(nx)}{n}\right)+\cancel{1}-f(x)-\cancel{1}\\
&= f\left(\frac{f(nx)}{n}\right)+\cancel{1}-f(x)-\cancel{1}\\
&= f\left(\frac{f(nx)}{n}\right)-f(x)\\
&= \varphi_n(x)
\end{aligned}$$

67 Il y a deux récurrences à faire.

Questions de cours

$\boxed{\mathbf{1}}$ Définition d'une fonction croissante, décroissante sur un ensemble.
La fonction inverse est-elle monotone sur $\mathbb{R}^*$?

Le mardi 28 novembre 2017

La courbe d'équation $f\left(x-a,\, y-b\right)=0$ est l'image de la courbe d'équation $f\left(x,\, y\right)=0$ par la translation de vecteur $a\vec{i}+b\vec{j}$.

Exemple : $\dfrac{\left(x-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\left(x-\beta\right)^2}{b^2}=1$