Correction du bac blanc
Samedi 7 février 2009

Exercice 1

1°) Formule de cours

2°) a) $(x+2)^{16}=\sum_{k=0}^{k=16}\binom{16}{k}\times x^k\times 2^{16-k}$

Donc le coefficient de x^{14} est égal à : $\binom{16}{14}\times 2^{16-14}=120\times 2^2=480$.

b) $\sum_{k=0}^{k=n}\frac{\binom{n}{k}}{2^k}=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\times\frac{1}{2^k}\times 1^{n-k}=\left(\frac{1}{2}+1\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n$

c) $\sum_{k=0}^{k=10}\binom{10}{k}3^{2k}=\sum_{k=0}^{k=10}\binom{10}{k}\times 9^k=\sum_{k=0}^{k=10}\binom{10}{k}\times 9^k\times 1^{10-k}=(9+1)^{10}=10^{10}$.

Exercice 2

1°) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ d'après les règles d'opérations algébriques pour les fonctions dérivables.

$x\in\left]0\,;+\infty\right[\quad f'(x)=1\times\left[a(\ln x)^2+b\ln x+c\right]+x\times\left[\frac{2a\ln x+b}{x}\right]$

$$f'(x)=a(\ln x)^2+b\ln x+c+2a\ln x+b$$

$$f'(x)=a(\ln x)^2+(2a+b)\ln x+b+c$$

$f'(\mathrm{e})=2 \Leftrightarrow a(\ln\mathrm{e})^2+(2a+b)\ln\mathrm{e}+b+c=2$

$\Leftrightarrow 3a+2b+c=2$

$f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0 \Leftrightarrow a\left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2+(2a+b)\ln\frac{1}{\mathrm{e}}+b+c=0$

$\Leftrightarrow -a+c=0$

$f'(\sqrt{\mathrm{e}})=0 \Leftrightarrow a\left(\ln\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2+(2a+b)\ln\sqrt{\mathrm{e}}+b+c=0$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0$

On obtient le système :

$$(S)\begin{cases}3a+2b+c=2\\-a+c=0\\\frac{5}{4}a+\frac{3}{2}b+c=0\end{cases}$$

On peut multiplier les deux membres de la 3e équation par 4.

$$\begin{cases}3a+2b+c=2\\-a+c=0\\5a+6b+4c=0\end{cases}$$

On résout le système par substitution.

La 2e équation donne $a=c$.

La 1ère équation donne $4a+2b=2$ soit $b=1-2a$.

La 3e équation donne alors : $5a+6(1-2a)+4a=0$ donc $6-3a=0$ d'où : $a=2$.

On obtient immédiatement $c=2$ et $b=-3$.

Conclusion : $a=2$; $b=-3$; $c=2$

3°) a) Pour tout $x>0$, on a : $f(x)=x\left[2\ln x(\ln x-3)+2\right]$.

Cette réécriture permet de trouver rapidement que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) On pose $X=-\ln x$.

On a alors $x=\mathrm{e}^{-X}=\frac{1}{\mathrm{e}^X}$.

$(x\to 0^+)\Leftrightarrow(X\to+\infty)$

$$f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}^X}\left(2X^2+3X+2\right)=2\frac{X^2}{\mathrm{e}^X}+3\frac{X}{\mathrm{e}^X}+\frac{2}{\mathrm{e}^X}=2\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X^2}}+3\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}}+\frac{2}{\mathrm{e}^X}$$

Or par croissance comparée, on sait que : $\lim_{X\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^X}{X^n}=+\infty$ (n étant un entier naturel)

On en déduit que : $\lim_{x\to 0^+}f(x)=0$.

4°) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ d'après les règles d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

Pour tout $x\in\left]0\,;+\infty\right[\quad f'(x)=2(\ln x)^2+\ln x-1$

Or pour tout $x\in\left]0\,;+\infty\right[\quad(\ln x+1)(2\ln x-1)=2(\ln x)^2+\ln x-1$ (petit développement facile).

On en déduit que pour tout $x\in\left]0\,;+\infty\right[\quad f'(x)=(\ln x+1)(2\ln x-1)$.

Pour étudier le signe de $2\ln x-1$ on résout deux inéquations et une équation.

$2\ln x-1<0$	$2\ln x-1>0$	$2\ln x-1=0$
$\ln x<\frac{1}{2}$ $\ln x<\ln\sqrt{\mathrm{e}}$ $x<\sqrt{\mathrm{e}}$	$\ln x>\frac{1}{2}$ $\ln x>\ln\sqrt{\mathrm{e}}$ $x>\sqrt{\mathrm{e}}$	$\ln x=\frac{1}{2}$ $\ln x=\ln\sqrt{\mathrm{e}}$ $x=\sqrt{\mathrm{e}}$

Pour étudier le signe de $\ln x+1$ on résout deux inéquations et une équation.

$\ln x+1<0$	$\ln x+1>0$	$\ln x+1=0$
$\ln x<-1$ $\ln x<\ln\frac{1}{\mathrm{e}}$ $x<\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\ln x>-1$ $\ln x>\ln\frac{1}{\mathrm{e}}$ $x>\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\ln x=-1$ $\ln x=\ln\frac{1}{\mathrm{e}}$ $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
Signe de $\ln x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{7}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\sqrt{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\left[2\left(\ln\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2-3\ln\frac{1}{\mathrm{e}}+2\right]$$

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}(2\times1+3+2)$$

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{7}{\mathrm{e}}$$

$$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}\left[2\left(\ln\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2-3\left(\ln\sqrt{\mathrm{e}}\right)+2\right]$$

$$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}\left[2\times\frac{1}{4}-3\times\frac{1}{2}+2\right]$$

$$f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}$$

<u>Exercice 3</u>

Partie A

1°) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $g'(x)=x\mathrm{e}^x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(0)=\mathrm{e}^0+1=2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ (aucun problème pour déterminer cette limite)

En $-\infty$, on rencontre une forme indéterminée. On doit transformer l'écriture de $g(x)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $g(x)=\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x+1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^x+1\right)=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x\mathrm{e}^x\right)=0 \text{ (limite de référence)}\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme, on a : }\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1.$$

2°) La fonction g est minorée par 1 sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ donc l'équation $g(x)=0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$.

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

De plus, g est continue sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$g(0)=2$

Le corollaire du TVI s'applique.

On a donc $g\left(\left[0\ ;+\infty\right[\right)=\left]-\infty\ ;2\right]$.

Comme $0\in\left]-\infty\ ;2\right]$, on en déduit que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

On en déduit que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

3°)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
SGN de $g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1°) En +∞, on rencontre une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On doit transformer l'écriture de $f(x)$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}}+2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \quad \text{(limite de référence)}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme, on a : } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty .$$

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=2$ pour asymptote horizontale en +∞.

2°) a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=0 \quad \text{(limite de référence)}\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient, on a : } \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^x+1}\right)=-\infty .$$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f(x)-(x+2)=\dfrac{x}{e^x+1}-x=-\dfrac{xe^x}{e^x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^x\right)=0 \quad \text{(limite de référence)}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient, on a : } \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0 .$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y=x+2$ pour asymptote oblique en –∞.

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $f(x)-(x-2)$		$+$	0	$-$	

Donc :

- $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur l'intervalle]–∞ ; 0[;
- $\mathcal{C}$ est au-dessous de $\mathcal{D}$ sur l'intervalle]0 ; +∞[;
- $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont sécantes au point d'abscisse 0.

3°) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)+1}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{g(x)}{\left(e^x+1\right)^2}$

b) On sait que $g(\alpha)=0$ donc $e^\alpha(1-\alpha)+1=0$.

Donc $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$ (on sait que $\alpha\neq1$).

Par suite, on a : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}+2=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}+2=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\cancel{1}+\alpha\cancel{-1}}{\alpha-1}}+2=\dfrac{\cancel{\alpha}}{\dfrac{\cancel{\alpha}}{\alpha-1}}+2=\alpha-1+2=\alpha+1$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2

La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α est horizontale donc elle a pour équation $y=f(\alpha)$ soit $y=\alpha+1$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 a pour équation $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

5°) **Question supplémentaire (qui ne figurait pas dans l'énoncé du bac blanc)**

> Soit B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse –α.
> Calculer l'ordonnée de B et démontrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point B est parallèle à $\mathcal{D}$.

On a : $f(-\alpha)=\dfrac{-\alpha}{e^{-\alpha}+1}+2$

Or $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$ d'où $e^{-\alpha}=\alpha-1$

D'où $f(-\alpha)=\dfrac{-\alpha}{\alpha\cancel{-1}\cancel{+1}}+2=-1+2=1$

L'ordonnée du point B est donc égale à 1.

$f'(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}(1+\alpha)+1}{\left(e^{-\alpha}+1\right)^2}$

On a : $e^{-\alpha}=\alpha-1$

$f'(-\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)(1+\alpha)+1}{(\alpha-1+1)^2}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2}=1$ donc la tangente T à $\mathcal{C}$ au point B est parallèle à $\mathcal{D}$.

Exercice 4

Partie A

1°) $\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=63$

2°) $\binom{6}{4}=\dfrac{5\times 6}{2}=15$

Partie B

1°) a) Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 3 donné, on considère un polygone convexe P_{n+1} à $n+1$ côtés et donc $n+1$sommets. On note alors A l'un de ses sommets.

Le nombre de diagonales de P_{n+1} qui ont pour sommet A est égal à n–1.
Le nombre de diagonales de P_{n+1}qui n'ont pas pour sommet A, est égal à u_n.
On en déduit que l'on a : $u_{n+1}=u_n+n-1$.

b) Pour n entier naturel supérieur ou égal à 3, on considère la phrase mathématique $P(n)$: « $u_n=\dfrac{n(n-3)}{2}$ ».

Démontrons par récurrence que la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3.

Initialisation :

Vérifions que $P(3)$est vraie.
$u_3=0$ car un polygone à trois côtés est un triangle et un triangle n'a aucune diagonale.
Or $\dfrac{3(3-3)}{2}=0$.
Donc $u_3=\dfrac{3(3-3)}{2}$

D'où $P(3)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons <u>un</u> entier naturel k supérieur ou égal à 3 tel que la phrase $P(k)$soit vraie c'est-à-dire
$u_k=\dfrac{k(k-3)}{2}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$est vraie c'est-à-dire $u_{k+1}=\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$.

On a : $u_{k+1}=u_k+k-1$ donc $u_{k+1}=\dfrac{k(k-3)}{2}+k-1$

$$u_{k+1}=\frac{k(k-3)+2k-2}{2}$$

$$u_{k+1}=\frac{k^2-k-2}{2}$$
$$u_{k+1}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

Par suite, la phrase $P(k+1)$est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(3)$est vraie et que si $P(k)$est vraie pour un entier naturel k supérieur ou égal à 3, alors $P(k+1)$est vraie.
Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3.

2°) Le nombre de diagonales d'un dodécagone est égal à $\dfrac{12\times 9}{2}=54$.
Le nombre de points d'intersection de toutes les diagonales entre elles est égal à
$\binom{54}{2}=\dfrac{54\times 53}{2}=27\times 53=1431$.