TS 3 — Devoir pour le vendredi 4 décembre 2009

I. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.
2°) Démontrer que *f* est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.
3°) Démontrer que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de *f* dans le plan *P* muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet un centre de symétrie.

II. Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f*.
Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.
Démontrer que *f* est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.

1°) $f : x \mapsto \tan^2 x$ 2°) $f : x \mapsto \tan 2x$ 3°) $f(x) = \ln|\cos x|$

III. Soit *a, b, c, d* quatre réels tels que $c \neq 0$ et *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit *f* la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{(cx+d)^n}$.

Calculer $f'(x)$ et démontrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(cx+d)^{n+1}}$ où *g* est une fonction affine.

Indication : écrire $f(x) = (ax+b) \times \dfrac{1}{(cx+d)^n}$ et dériver en utilisant la formule de dérivée d'un produit.

IV. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.
2°) Démontrer que *f* est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.

Indication : on pourra écrire $f(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x^2}$ pour dériver la fonction comme un produit.

V. Rappeler les formules d'approximation affine tangente de $\ln(1+h)$ et de e^h pour h « proche » de 0.
A l'aide de ces formules, donner sans utiliser la calculatrice, une valeur approchée des nombres suivants :

$\mathrm{A} = \ln(1{,}003)$; $\mathrm{B} = \mathrm{e}^{-0{,}01}$; $\mathrm{C} = \ln 1{,}96 - \ln 2$; $\mathrm{D} = \mathrm{e}^{-0{,}03} + \mathrm{e}^{0{,}04}$.

Comparer avec les résultats obtenus sur la calculatrice.

VI. Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par leurs premiers termes et les relations de récurrence :

$u_0 = 12$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$, $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $w_n = u_n - v_n$.
Déterminer la nature de la suite (w_n) ; en déduire w_n en fonction de *n*.
2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Démontrer que la suite (t_n) est stationnaire.
3°) Exprimer u_n et v_n en fonction de *n*.

VII. Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_1 = \dfrac{1}{3}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n$.

1°) Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.
Déterminer la nature de la suite (v_n).
2°) Exprimer u_n en fonction de *n*.

TS 3

Corrigé du devoir pour le 4 décembre 2009

I. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|$.

1°) $\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\ ;\ 1\}$

2°) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme somme de fonctions dérivables.

et $\forall x \in \mathcal{D}\quad f'(x) = \dfrac{-\dfrac{1}{(x-1)^2}}{\dfrac{x}{x-1}} = -\dfrac{1}{x(x-1)}$

3°) Démontrons que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\ ;0\right)$ pour centre de symétrie.

• $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à $\dfrac{1}{2}$.

$1+h \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}+h \neq 0$ et $\dfrac{1}{2}+h \neq 1$

$\Leftrightarrow h \neq -\dfrac{1}{2}$ et $h \neq \dfrac{1}{2}$

$1-h \in \mathcal{D} \Leftrightarrow h \neq -\dfrac{1}{2}$ et $h \neq \dfrac{1}{2}$

• $\forall h \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{1}{2}\ ;\dfrac{1}{2}\right\}\quad f\left(\dfrac{1}{2}+h\right)+f\left(\dfrac{1}{2}-h\right) = \ln\left|\dfrac{\dfrac{1}{2}+h}{\dfrac{1}{2}+h-1}\right| + \ln\left|\dfrac{\dfrac{1}{2}-h}{\dfrac{1}{2}-h-1}\right|$

$= \ln\left|\dfrac{\dfrac{1}{2}+h}{h-\dfrac{1}{2}}\right| + \ln\left|\dfrac{\dfrac{1}{2}-h}{-\dfrac{1}{2}-h}\right|$

$= 0$

Donc on en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega\left(\dfrac{1}{2}\ ;0\right)$ pour centre de symétrie.

II. 1°) $f : x \mapsto \tan^2 x$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\forall x \in \mathcal{D}\quad f'(x) = 2\tan x\left(1+\tan^2 x\right)\left(= \dfrac{2\tan x}{\cos^2 x}\right)$

2°) $f : x \mapsto \tan 2x$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\forall x \in \mathcal{D}\quad f'(x) = 2\left(1+\tan^2 2x\right)$

3°) $f(x) = \ln|\cos x|$

$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\forall x \in \mathcal{D}\quad f'(x) = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

III. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ comme **fonction rationnelle**.

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}\ f'(x) = a \times \dfrac{1}{(cx+d)^n} + (ax+b) \times \left[-\dfrac{nc}{(cx+d)^{n+1}}\right]$

(Rappel $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$)

$$\boxed{f'(x) = \frac{acx(1-n)+ad-nbc}{(cx+d)^{n+1}}}$$

IV. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$

1°) $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$

2°) f est dérivable sur $\mathcal{D}$ d'après la règle sur les produits de fonctions dérivables.

Pour dériver f, on écrit $f(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*\quad f'(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x^2} + \ln x \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{x^2} + \ln x \times \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)$

$\boxed{f'(x)\dfrac{1-2\ln x}{x^3}}$

V.

$A \approx 0,003$
$B \approx 0,99$
$C = \ln 1,96 - \ln 2 = \ln \frac{1,96}{2} = \ln 0,98 = \ln(1-0,02)$
$C \approx -0,02$
$D \approx 2,01$

VI. $u_0 = 12$, $v_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{12} = \frac{w_n}{12}$

La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{12}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad w_n = \left(\frac{1}{12}\right)^n w_0 = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad t_{n+1} = 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3 \times \frac{u_n + 2v_n}{3} + 8 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 3u_n + 8v_n = t_n$

La suite (t_n) est donc stationnaire.
$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad t_n = t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 44$ (pour une suite stationnaire, tous les termes sont égaux au premier terme).

3°) u_n et v_n vérifient le système

$$\begin{cases} u_n - v_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3u_n + 8v_n = 44 \end{cases}$$

On résout ce système par combinaison.

$$\begin{cases} 11u_n = 88 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + 44 & (8L_1 + L_2) \\ 11v_n = 44 - 33 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & (-3L_1 + L_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_n = 8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n + 4 \\ v_n = 4 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \end{cases}$$

VII. $u_1 = \frac{1}{3}$; $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n$.

1°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\frac{n+1}{3n} u_n}{n+1} = \frac{u_n}{3n} = \frac{1}{3} v_n$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

2°) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad v_n = v_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n = n v_n = n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{n}{3^n}$