	MATHEMATIQUES **Devoir N°4 - Baccalauréat Blanc**	**Term.S** **07.02.09**

La présentation et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

EXERCICE 1. [1,5+(1+4,5) = 7 sur 40]

1. Rappeler l'énoncé de la formule du binôme de Newton (la démonstration n'est pas demandée).

2. 2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner le coefficient de x^{14} dans le développement de $(x + 2)^{16}$.

   2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression simplifiée des expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^{n-k} \times 3^{k} \ ; \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^{k}} \ ; \qquad \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \times 3^{2k} \ .$$

EXERCICE 2. [1+1,5+(1+1,5)+(1+3) = 9 sur 40]

On considère la fonction f définie à l'aide des trois paramètres réels a, b et c sur l'intervalle $]0 \ ; +\infty[$ par $f(x) = x[a(\ln x)^2 + b\ln x + c]$.

1. Pour $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c.

2. On donne $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, $f'\left(\sqrt{e}\right) = 0$ et $f'(e) = 2$.

   Calculer les valeurs de a, b et c.
   On admet que quel que soit $x \in]0 \ ; +\infty[$, on a $f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$.

3. 3.1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   3.2. En utilisant le changement de variable $X = -\ln x$, déterminer la limite de f en 0 à droite.

4. 4.1. Démontrer que quel que soit $x \in]0 \ ; +\infty[$, on a $f'(x) = (\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.
   4.2. Etudier le sens de variation de f, déterminer les valeurs des extrema locaux et dresser le tableau de variation de f.

EXERCICE 3. [[1,5+2,5+1]+[2+(1+1+1)+(1+3+1)+2] = 20 sur 40]

PARTIE A: Etude d'une fonction auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x(1 - x) + 1$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

   On admettra que cette solution appartient à l'intervalle [1,27; 1,28] et on la notera α.
3. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B: Etude d'une fonction *f*.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan (unités : 1cm en abscisse et 2 cm en ordonnée).

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2. 2.1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   2.2. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
   2.3. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

3. 3.1. Démontrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie A.
   3.2. Déterminer deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$, α étant la valeur définie dans la partie A.
   Donner une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α.
   3.3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ et ses éléments caractéristiques ainsi que la tangente au point A d'abscisse 0.

5. **Question hors barème (qui ne figurait pas dans l'énoncé du bac blanc)**

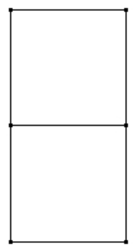
Soit B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $-\alpha$.
Calculer l'ordonnée de B et démontrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point B est parallèle à $\mathcal{D}$.

<u>EXERCICE 4. Cet exercice ne concerne que les élèves qui NE SUIVENT PAS l'enseignement de spécialité.</u> [[1+1]+[1+2+2] = 7 sur 40]

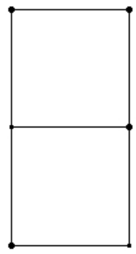
Les deux parties A et B sont indépendantes.

<u>PARTIE A.</u>

Un caractère de l'écriture Braille, destinée aux malvoyants, est formé de points obtenus en piquant l'un des six points de la grille ci-dessous.



Exemple de la lettre « M »



1. Combien de caractères Braille peut-on ainsi former ?

2. Combien de caractères sont formés de quatre points ?

<u>PARTIE B.</u>

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on appelle u_n le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés que l'on peut former.
On rappelle qu'un polygone est dit « convexe » lorsqu'aucun de ses angles n'est supérieur à 180°.

1. 1.1. Démontrer que, pour $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 3$, $u_{n+1} = u_n + n - 1$.

   1.2. En déduire, en utilisant un raisonnement par récurrence, que quel que soit $n\in\mathbb{N}$, $n \geq 3$, on a

$$u_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

2. On considère un dodécagone convexe (polygone convexe à 12 côtés). On suppose que ce dodécagone est tel qu'il n'y a pas deux diagonales parallèles ni trois diagonales concourantes.
   Utiliser un raisonnement d'analyse combinatoire pour donner le nombre de points d'intersections de toutes les diagonales entre elles, à l'intérieur ou à l'extérieur du dodécagone.

<u>EXERCICE 4. Cet exercice ne concerne que les élèves qui SUIVENT l'enseignement de spécialité.</u> [1,5+1,5+(1,5+1,5)+1 = 7 sur 40]

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Soit F l'application de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M(x , y) associe le point M'(x', y') tel que $\wedge \begin{cases} x' = \dfrac{-1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y - 1 \end{cases}$.

1. Montrer que F est une isométrie de $\mathcal{P}$.

2. Déterminer une translation T et une isométrie G fixant le point O telles que F = T o G.

3. 3.1. Déterminer l'ensemble des points fixes de G.
   3.2. En déduire la nature de G.

4. Schématiser A' = F(A) pour A(–1; 2) en utilisant ces résultats. Expliquer la construction.