TS

Exercices sur les primitives

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{16}$, on demande de justifier que *f* admet des primitives sur I et de donner une primitive *F* de la fonction *f* sur l'intervalle I proposé.

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$; $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto 3\cos x - 2\sin(4x)+1$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto \cos x \times \sin^5 x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto \tan^2 x$; $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

$\boxed{7}$ $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; $\mathrm{I} =]0\,;\pi[$

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto \cos^2 x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ (indication : linéariser $f(x)$)

$\boxed{9}$ $f : x \mapsto (3x-1)^5$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{10}$ $f : x \mapsto x\cos x + \sin x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{11}$ $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$; $\mathrm{I} =]-\infty\,;2[$

$\boxed{12}$ $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{13}$ $f : x \mapsto \cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{14}$ $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

$\boxed{15}$ $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

$\boxed{16}$ $f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$; $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

$\boxed{17}$ On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin(\ln x)}{x}$.
Déterminer une primitive de *f* et *g* sur $]\,0\,;+\infty[$.

$\boxed{18}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$. Déterminer la primitive *F* de *f* sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

$\boxed{19}$ 1°) On considère la fonction $F : x \mapsto x\ln x - x$. Calculer $F'(x)$.

2°) En déduire les primitives de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{20}$ 1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right]$. Calculer $f'(x)$.

2°) En déduire une primitive de la fonction $g : x \mapsto (\ln x)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{21}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)^3}$.

1°) Déterminer deux réels *a* et *b* tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on ait $f(x) = \dfrac{a}{(x-1)^2} + \dfrac{b}{(x-1)^3}$.

2°) En déduire une primitive *F* de *f* sur $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$.

$\boxed{22}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x}{\left(x^2+x+2\right)^2}$.

Déterminer deux réels *a* et *b* tels que la fonction *F* définie par $F(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+x+2}$ soit une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{23}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$.

1°) Déterminer deux réels *a* et *b* tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on ait $f(x) = a + \dfrac{b}{(x-2)^2}$.

2°) En déduire une primitive *F* de *f* sur $\mathrm{I} =]2\,;+\infty[$.

$\boxed{24}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{2x}$.

1°) Justifier que *f* admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer une fonction polynôme *P* du second degré telle que la fonction $F : x \mapsto P(x)\mathrm{e}^{2x}$ soit une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Méthode pour la plupart des exercices : on essaie de reconnaître une forme.
On fait une réécriture en utilisant éventuellement une constante d'ajustement.
On agit un peu mécaniquement (de même que lorsque l'on calcule une dérivée, on ne se remémore pas à chaque fois que la fonction)

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$; $\mathrm{I} = \left]1\,;+\infty\right[$

f est continue sur I donc elle admet des primitives sur I.

On reconnaît une forme du type $\dfrac{u'}{u^2}$.

On pose $u(x) = x^2 - 1$.

$u'(x) = 2x$

$f = \dfrac{u'}{u^2}$

$F = -\dfrac{1}{u}$

Une primitive de f sur I est la fonction F définie <u>sur</u> I par $F(x) = -\dfrac{1}{x^2-1}$.

Remarques :

• L'énoncé demande <u>une</u> primitive donc il n'y a pas de constante k à mettre.

• On peut vérifier que $\forall x \in \mathrm{I}$ $F'(x) = \dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$.

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^2}$.

On pose $u(x) = x^2 + 2x + 4$.

$u'(x) = 2x + 2$

Réécriture de la fonction f : $f = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u'}{u^2}$ ($\dfrac{1}{2}$ est une « constante d'ajustement »)

$F = -\dfrac{1}{2u}$

$F(x) = -\dfrac{1}{2\left(x^2+2x+4\right)}$

On peut vérifier que $\forall x \in \mathrm{I}$ $F'(x) = \dfrac{x+1}{\left(x^2+2x+4\right)^2}$.

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+4}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x) = x^2 + 4$.

$u'(x) = 2x$

Réécriture de la fonction f : $f = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ ($\dfrac{3}{2}$ est une « constante d'ajustement »)

$F = \dfrac{3}{2} \times 2\sqrt{u} = 3\sqrt{u}$

$F(x) = 3\sqrt{x^2+4}$

En dérivant F, on peut vérifier que l'on « retombe » sur f.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto 3\cos x - 2\sin(4x) + 1$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On effectue une primitive terme à terme en utilisant la règle « la primitive d'une somme est égale à la somme des primitives ».

Primitive de $\cos x$: $\sin x$; primitive de $\sin 4x$: $-\dfrac{1}{4}\cos 4x$ (règle sur les primitives de $\sin(ax+b)$: $-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)$ qu'on doit savoir par cœur mais qu'on retrouve très facilement) ; primitive de 1 : x.

$F(x) = 3\sin x + \dfrac{1}{2}\cos 4x + x$

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto \cos x \times \sin^5 x$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On pense à la forme $u'u^n$.
On pose $u(x) = \sin x$.

$u'(x) = \cos x$

Réécriture de la fonction f : $f = u'u^5$

$F = \dfrac{u^6}{6}$

$F(x) = \dfrac{\sin^6 x}{6}$ (rappel : $\sin^6 x = (\sin x)^6$)

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto \tan^2 x$; $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$

Il faut faire une réécriture : $f(x) = \left(\tan^2 x + 1\right) - 1$; $F(x) = \tan x - x$

$\boxed{7}$ $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin^3 x}$; $\mathrm{I} = \left]0\,;\pi\right[$

Forme $\dfrac{u'}{u^n}$ (primitive : $-\dfrac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k$) avec $u(x) = \sin x$; $F(x) = -\dfrac{1}{2\sin^2 x}$.

8 Écrire : $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$ (linéarisation de $\cos^2 x$) ; on fait la primitive terme à terme.

$F(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{4}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \cos^2 x$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\cos 2x}{2}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\times\frac{\sin 2x}{2}$$
$$=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$$

9 Forme $u'u^n$ avec $u(x)=3x-1$; $f=\dfrac{1}{3}u'u^5$ d'où $F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u^6}{6}=\dfrac{u^{18}}{18}$; $F(x)=\dfrac{(3x-1)^6}{18}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto (3x-1)^5$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

On pense à la forme $u'u^n$.

On pose $u(x)=3x-1$.

On a : $u'(x)=3$.

On peut donc écrire $f=\dfrac{1}{3}u'u^5$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{u^6}{6}=\dfrac{u^{18}}{18}$

$F(x)=\dfrac{(3x-1)^6}{18}$

10 On reconnaît la forme $u'v+uv'$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=\sin x$; $F(x)=x\sin x$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x\cos x+\sin x$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

On reconnaît la forme $u'v+uv'$ où u et v sont les fonctions définies par :
$u(x)=\sin x$
$v(x)=x$

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F=uv$
$F(x)=x\sin x$

11 On applique la formule du cours pour une fonction u définie par $u(x)=\dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ où a et b sont deux réels tels que a soit non nul.

$F(x)=-2\sqrt{2-x}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$; $\mathrm{I}=]-\infty\,;2[$

On applique la formule de primitive d'une fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{ax+b}}$ avec $a=-1$ et $b=2$.

$$F(x)=\frac{-2}{1}\times\sqrt{2-x}$$
$$=-2\sqrt{2-x}$$

Autre méthode :

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x)=2-x$.

$u'(x)=-1$

On peut écrire : $f=-\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Donc une primitive de f sur I est la fonction F définie par $F(x)=-2\sqrt{2-x}$.

12 $F(x)=-2\sqrt{2+\cos x}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{2+\cos x}}$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

On pose $u(x)=2+\cos x$.

On a : $u'(x) = -\sin x$.

On a donc $\sin x = -u'(x)$.

On peut donc écrire $f = -\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F = -2\sqrt{u}$

$F(x) = -2\sqrt{2+\cos x}$

On peut écrire : $f = -\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

Donc une primitive de f sur I est la fonction F définie par $F(x) = -2\sqrt{2-x}$.

$\boxed{13}$ $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On applique la formule de primitive d'une fonction de la forme $x \mapsto \cos(ax + b)$ avec $a = 2$ et $b = -\dfrac{\pi}{6}$.

Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

$\boxed{14}$ Réécriture : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$. Il s'agit de la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -\dfrac{1}{x}$; $F(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$; $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

On reconnaît la forme $u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = -\dfrac{1}{x}$.

$F(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

$\boxed{15}$ Il s'agit de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$; $F(x) = \ln\left|\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right| = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$.

valeur absolue de sécurité

On peut enlever la valeur absolue car $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} > 0$.)

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.

$u(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$
$u'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$

$F(x) = \ln\left|\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right| = \ln\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$

$\boxed{16}$ On effectue la réécriture : $f(x) = (2x+3)^{\frac{1}{2}}$.

Forme $u'u^{\alpha}$ avec $u(x) = 2x+3$ et $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

$u'(x) = 2$

$f(x) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times (2x+3)^{\frac{1}{2}}$

$f = \dfrac{1}{2}u'u^{\frac{1}{2}}$ d'où $F = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{u^{\frac{3}{2}}}{3}$; $F(x) = \dfrac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{2x+3}$; $\mathrm{I} = \left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

On effectue la réécriture : $\boxed{f(x) = (2x+3)^{\frac{1}{2}}}$.

On pense à la forme $u'u^{\alpha}$

avec $u(x) = x^2 + 1$
$u'(x) = 2x$
$\alpha = \dfrac{1}{2}$

On peut écrire $f = \dfrac{1}{2} \times u' \times u^{\frac{1}{2}}$.

$F = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}$

$F = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + k$

Une primitive de f sur I est la fonction F définie par $F(x) = \frac{(2x+3)^{\frac{3}{2}}}{3} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{17}$ Réécrire les quotients en produits.
Il s'agit des formes $u'\cos u$ et $u'\sin u$ avec $u(x) = \ln x$; $F(x) = \sin(\ln x)$; $G(x) = -\cos(\ln x)$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \frac{\cos(\ln x)}{x}$ et $g : x \mapsto \frac{\sin(\ln x)}{x}$

Déterminons des primitives de f et g sur $]0 ; +\infty[$.

• Primitive de f :

On pense à la forme u' cos u avec $u(x) = \ln x$.

On peut écrire $f = u'$ cos u.

Donc une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$ est la fonction F définie par $F(x) = \sin(\ln x)$.

• Primitive de g :

On pense à la forme u' sin u avec $u(x) = \ln x$.

On peut écrire $g = u'$ sin u.

Donc une primitive de g sur $]0 ; +\infty[$ est la fonction G définie par $G(x) = -\cos(\ln x)$.

$\boxed{18}$ On réécrit $f(x) = x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 2x \times (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$
On reconnaît une forme du type $u'u^{\alpha}$.

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est la fonction F définie par $F(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$2^{\frac{3}{2}} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminons la primitive F de f qui s'annule en 1.

On pense à la forme $u'u^{\alpha}$.

$u(x) = x^2 + 1$
$u'(x) = 2x$
$\alpha = \frac{1}{2}$

On peut écrire $f = \frac{1}{2} \times u' \times u^{\frac{1}{2}}$.

$F = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}} + k$

$F = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + k$

Les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par $F(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
F(1) = 0 &\Leftrightarrow \frac{(1^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} + k = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} + k = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2^1 \times 2^{\frac{1}{2}}}{3} + k = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} + k = 0 \\
&\Leftrightarrow k = -\frac{2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 1 est la fonction F définie par $\boxed{F(x) = \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

$\boxed{19}$ 1°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $F'(x) = \ln x$
2°) Les primitives de f sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $g : x \mapsto x \ln x - x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Solution détaillée :

1°) $F : x \mapsto x \ln x - x$.

Calculons $F'(x)$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = \ln x + 1 - 1$

$\qquad\qquad\qquad = \ln x$

2°) Déduisons-en les primitives de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question 1°), la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

On en déduit que les primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto x \ln x - x + k$ $(k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{20}$ 1°) Attention : $f(x) = \boxed{x}\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right]$.

Il faut bien voir le x qui précède le crochet.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = (\ln x)^2 - 2$

2°) D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = f'(x) + 2$.

Une primitive de la fonction f ' est f (il suffit de réfléchir deux minutes pour voir pourquoi ; tout simplement, parce que la dérivée de f c'est f ').

Les primitives de g sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $G : x \mapsto x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right] + 2x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Solution détaillée :

1°) $f : x \mapsto \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right]}_{v(x)}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

On applique la formule de dérivation d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$ où u et v sont les fonctions définies par $u(x) = x$ et $v(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = 1 \times \left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right] + x \times \left(2\ln x \times \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x}\right)$

$\qquad\qquad = (\ln x)^2 - 2\ln x + 2\ln x - 2$

$\qquad\qquad = (\ln x)^2 - 2$

2°) Déduisons-en une primitive de la fonction $g : x \mapsto (\ln x)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question précédente, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = f'(x) + 2$.

f est une primitive de f ' sur $\mathbb{R}_+^*$ donc les primitives de g sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $G : x \mapsto x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x\right] + 2x + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{21}$ 1°) $a = 2$; $b = 5$

2°) Une primitive de f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ est la fonction F définie sur $]1 ; +\infty[$ par $F(x) = -\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \frac{2x+3}{(x-1)^3}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

1°) Déterminons deux réels a et b tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on ait $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$.

On pose : $g(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad g(x) = \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^3}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{ax - a + b}{(x-1)^3}$

Pour que f et g soient égales, il suffit de choisir a et b tels que $\begin{cases} a = 2 \\ -a + b = 3 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$.

On vérifie que ces deux valeurs conviennent c'est-à-dire que

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \qquad f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{5}{(x-1)^3}$.

2°) **Déduisons-en une primitive F de f sur $I =]1 ; +\infty[$.**

Grâce à l'écriture obtenue dans la question 1°), on reconnaît la somme de deux fonctions de la forme $\frac{u'}{u^n}$.

Une primitive de f sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ est donc la fonction F définie sur $]1 ; +\infty[$ par $F(x) = -\frac{2}{x-1} - \frac{5}{2(x-1)^2}$.

En effet, la primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'}{u^n}$ où n est un entier différent de 1 est la fonction $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$.

On a la somme de deux formes de ce type $\dfrac{u'}{u^n}$.

$\boxed{22}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $F'(x)=\dfrac{-ax^2-2bx+2a-b}{\left(x^2+x+2\right)^2}$ d'où par identification : $\begin{cases} a=-1 \\ -2b=4 \\ 2a-b=0 \end{cases}$. Donc : $a=-1$; $b=-2$

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2+4x}{\left(x^2+x+2\right)^2}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Déterminons deux réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+2}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad F'(x)=\frac{a\left(x^2+x+2\right)-(ax+b)(2x+1)}{\left(x^2+x+2\right)^2}$$
$$=\frac{ax^2+ax+2a-2ax^2-ax-bx-b}{\left(x^2+x+2\right)^2}$$
$$=\frac{-ax^2-2bx+2a-b}{\left(x^2+x+2\right)^2}$$

Pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$, il suffit de choisir a et b telle que $\begin{cases} -a=1 \\ -2b=4 \\ 2a-b=0 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$.

$\boxed{23}$ 1°) On peut par exemple mettre le numérateur de $f(x)$ sous forme canonique en écrivant :

$f(x)=\dfrac{x^2-4x+4-6}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2}=1-\dfrac{6}{(x-2)^2}$ d'où : $a=1$; $b=-6$ 2°) $F(x)=x+\dfrac{6}{x-2}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x-2}{(x-2)^2}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

1°) Déterminons deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ $f(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$.

1ère méthode :

On pose : $g(x)=a+\dfrac{b}{(x-2)^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \qquad g(x)=\frac{a(x-2)^2+b}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{a\left(x^2-4x+4\right)+b}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{ax^2-4ax+4a+b}{(x-1)^2}$$

Pour que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ $f(x)=g(x)$, il suffit de choisir a et b tels que $\begin{cases} a=1 \\ -2=4a+b \\ -4a=-4 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$.

On vérifie que ces deux valeurs conviennent c'est-à-dire que :

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$ $f(x)=1-\dfrac{6}{(x-2)^2}$ (1).

2e méthode :

On met le numérateur de $f(x)$ sous forme canonique.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2\} \quad f(x)=\frac{x^2-4x+4-6}{(x-2)^2}$$
$$=\frac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2}$$
$$=1-\frac{6}{(x-2)^2}$$

2°) Déduisons-en une primitive F de f sur $\mathrm{I}=\left]2\,;+\infty\right[$.

D'après l'égalité (1) obtenue à la question précédente, une primitive de f sur I est la fonction F définie par :
$F(x)=x+\dfrac{6}{x-2}$.

24 1°) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

2°) On ne peut pas déterminer une primitive de f directement (car on ne reconnaît pas une forme) d'où le fait que l'énoncé guide pour trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Idée : poser $P(x)=ax^2+bx+c$. On trouve : $P(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$.

Détail de la résolution : $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{2x}$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad F'(x)=(2ax+b)\mathrm{e}^{2x}+\left(ax^2+bx+c\right)2\mathrm{e}^{2x}$

$F'(x)=\left[2ax^2+(2a+2b)x+b+2c\right]\mathrm{e}^{2x}$

Remarque : il est nécessaire de donner le résultat de $F'(x)$ sous forme factorisée.

Pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$, il suffit de choisir a, b, c tels que : $(S)\begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases}$

$(S)\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{4}\end{cases}$

On obtient $F(x)=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$.

Savoirs-faire du chapitre sur les primitives

À la fin de ces exercices, les élèves doivent savoir calculer des primitives dans des cas simples :

- lecture inverse du tableau des dérivées
- transformations d'écriture

Il faut aussi savoir démontrer qu'une fonction donnée est une primitive d'une autre fonction (ce qui est très simple, il suffit de dériver la fonction donnée).

Enfin, il faut savoir chercher une primitive d'une fonction sous une forme donnée (méthode des coefficients indéterminés).

Plus tard, avec le chapitre des intégrales, on verra une autre façon de déterminer une primitive avec les intégrales.