1ère L Option — Les fonctions dérivées

Dans le chapitre 1, on a défini la notion de **nombre dérivé** d'une fonction en un réel (cadre des fonctions) et la notion de tangente à une courbe en un point (cadre géométrique).

Dans ce chapitre, **on va passer de l'aspect graphique à l'aspect calcul** qui sera poursuivi dans le chapitre suivant.

I. Introduction : du nombre dérivé à la fonction dérivée

Difficulté de la notation $f'(a)$: on n'a pas défini de fonction f' ; pour nous c'était une notation à comprendre d'un bloc.

Peut-on définir une fonction f' ? Si oui, comment.

II. Fonction dérivée

Passage local → global

1°) Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **dérivable** $\boxed{\textbf{sur}}$ **I** lorsque f est **dérivable** en tout réel $a \in$ I de I.
- Dans ce cas, on définit une nouvelle fonction $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
  $x \mapsto f'(x)$ (nombre dérivé de f en x)

  appelée **« fonction dérivée »** de f (ou plus simplement **dérivée** de f).

2°) Remarque sur la notation

Cela permet d'interpréter $f'(a)$ comme image de a par la fonction f'.

3°) Questions

- Comment calculer la dérivée d'une fonction ? Voir chapitre suivante (Comment dériver une fonction)

- A quoi sert la dérivée de f ?

→ Tangente

→ Sens de variation (voir deux chapitres plus loin)

III. Dérivées des fonctions de référence

1°) Tableau à savoir par cœur (admis sans démonstration)

	$f(x) =$	$f'(x) =$
L_1	k (k réel fixé)	0
L_2	x	1
L_3	x^2	$2x$
L_4	x^3	$3x^2$
L_5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
L_6	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

2°) Plusieurs manières de lire le tableau

● 1ère manière

On dira que
- la dérivée de k (ou d'une fonction constante) est égale à 0
- la dérivée de x est égale à 1
- la dérivée de x^2 est égale à 1
- la dérivée de x^3 est égale à $3x^2$
- la dérivée de $\sqrt{x}$ est égale à $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
- la dérivée de $\frac{1}{x}$ est égale à $-\frac{1}{x^2}$

On dit que l'on passe en « mode dérivé ».

● 2e manière

En meilleur langage, on peut dire que :

- la fonction $f : x \mapsto k$ a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto 0$
- la fonction $f : x \mapsto x$ a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto 1$
- la fonction $f : x \mapsto x^2$ a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto 2x$

etc.

● **3e manière**

- Si $f(x)=k$, alors $f'(x)=0$
- Si $f(x)=x$, alors $f'(x)=1$
- Si $f(x)=x^2$, alors $f'(x)=2x$

etc.

3°) Commentaires

● Chaque fonction a une dérivée différente.

● On observe la dérivée de toutes les fonctions donne chaque fois du x sauf pour les fonctions constantes et pour la fonction x.

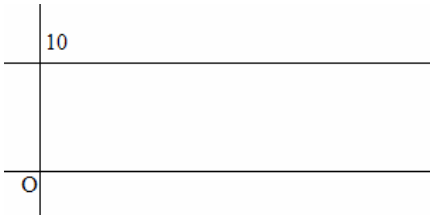
IV. <u>Retour sur les dérivées de deux types de fonctions</u>

1°) Fonctions constantes (ligne L_1 du tableau)

● **Exemple**

$f(x)=10$

$f'(x)=0$ (on dit que l'on passe en « mode dérivé »)

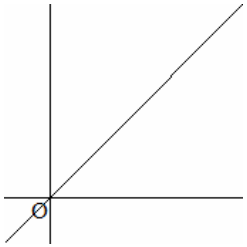


● **Cas général**

Une fonction constante est représentée graphiquement par une droite parallèle à l'axe des abscisses.
Il y a donc une tangente en tout point confondue avec la droite.
Le coefficient directeur de cette tangente est égale à celui de la droite et vaut donc 0.

2°) Cas de la fonction $f : x \mapsto x$ (L_2 du tableau)

Cette fonction est représentée graphiquement par une droite de coefficient directeur 1 et passe par O.
Il y a donc une tangente en tout point confondue avec la droite.
Le coefficient directeur de cette tangente est égale à celui de la droite et vaut donc 1.



IV. <u>Utilisation pour les nombres dérivés et les tangentes</u>

(On repasse dans le cadre géométrique).

1°) Recherche de nombres dérivés

$f : x \mapsto x^2$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

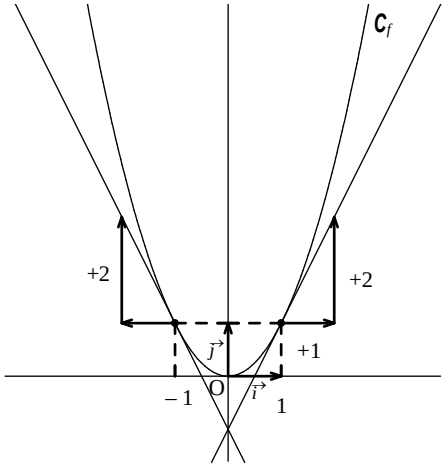
f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x)=2x$

On a par exemple : $f'(1)=2$, $f'(0)=0$, $f'(-1)=-2$

Graphiquement, cela permet de construire les tangentes aux points d'abscisses 1, 0, – 1.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur 2.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 0.
La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse – 1 a pour coefficient directeur – 2.



2°) Propriété

> ***f* est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.**
> **C_f admet en tout point d'abscisse $a \in I$ une tangente (non parallèle à l'axe des ordonnées)**
> **d'équation de la tangente *T* à la courbe C_f au point A d'abscisse *a* s'écrit**
> $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

a : abscisse du point de contact

$f(a)$: image de *a* par *f*

$f'(a)$: nombre dérivé de *f* en *a* ou <u>image de *a*</u> par la fonction dérivée *f'*.

(N.B. : Dans une équation de droite, il y a toujours *x* et *y*)

1ère L Option — Exercices sur les fonctions dérivées

1 Dans les deux cas, on se contentera d'écrire $f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

1°) Donner la dérivée de la fonction *f* définie par *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5$.

2°) Donner la dérivée de la fonction *f* définie par *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}$.

2 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = x^2$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Donner la fonction dérivée de *f*.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
On rédigera ainsi :
« L'équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A s'écrit $y = \ldots$ ».
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et *T* sur un graphique (unité graphique : 1 cm).
Pour le tracé de *T*, on pourra utiliser le point A et le coefficient directeur (l'équation réduite n'est pas forcément utile pour tracer une tangente).

3 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1°) Donner la fonction dérivée de *f*.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et *T* sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

4 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Donner la fonction dérivée de *f*.
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1.
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et *T* sur un graphique (unité graphique : 1 cm).

5 On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
1°) Donner la fonction dérivée de *f*.
2°) Déterminer en quels points la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$.

Mise en garde : l'équation réduite de la tangente ne sert à rien pour ce type d'exercice.

On rédigera ainsi la conclusion :

« La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$ aux points A(… ; …) et B(…. ; …..) ».

Réponses

1 Dans les deux cas, $f'(x)=0$ (dérivée d'une fonction constante).

2 2°) L'équation réduite de T s'écrit : $y=2x-1$.

3 2°) L'équation réduite de T s'écrit : $y=-x+2$.

4 3°) L'équation réduite de T s'écrit : $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

5 2°) $\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $-\frac{1}{4}$ aux points $\mathrm{A}\left(2\,;\frac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{B}\left(-2\,;-\frac{1}{2}\right)$ d'abscisses respectives 2 et -2.