Exercices sur les réels

1 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} a = 1-\sqrt{b} \\ b = 1-\sqrt{a} \end{cases}$.

2 1°) Démontrer que, pour tout réel $x \in [0\,;1]$, on a : $x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

2°) En déduire que, pour tout couple $(a, b) \in [0\,;1]^2$, on a : $\min\big(a(1-b)\,;b(1-a)\big) \leqslant \frac{1}{4}$.

3 Démontrer que $|\,x\,| \leqslant 1$ et $|\,y\,| \leqslant 1 \Rightarrow |\,1+xy\,| \geqslant |\,x+y\,|$.

4 Démontrer que, pour tout réel x, on a : $|\,1+x\,|^3 + |\,1-x\,|^3 \geqslant 2\left(1+|\,x\,|^3\right)$.

5 Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On pose $I = [\![1\,;n]\!]$ et $J = [\![1\,;p]\!]$. Voir exercice **22**.

Soit $\left(a_{i,\,j}\right)_{(i,\,j)\in I\times J}$ une famille de réels.

Démontrer que $\max\limits_{i\in I}\left(\min\limits_{j\in J} a_{i,\,j}\right) = \min\limits_{j\in J}\left(\max\limits_{i\in I} a_{i,\,j}\right)$.

6 en lien avec l'exercice **72**

1°) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la partie entière de $\sqrt{n(n+1)}$ pour tout entier naturel n.
Démontrer cette conjecture.
2°) Même question avec $2\sqrt{n(n+1)}$.

7 **Caractérisation séquentielle d'une borne supérieure**

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

$\alpha = \sup \mathrm{A} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ majore A} \\ \text{Il existe une suite } (\alpha_n) \text{ d'éléments de A telle que } (\alpha_n) \text{ converge vers A} \end{cases}$.

8 Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{E}\left(\sqrt{k}\right)$ (n est un entier naturel).

9 Soit x réel. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k\mathrm{E}(kx)$.

Étudier la convergence de la suite (u_n).

10 Caractériser les intervalles I de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un singleton tels que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{E}(x) \in \mathrm{I}$.

11 Soit x un réel.
Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier.
1°) Si x^7 et x^{12} sont rationnels, alors x est rationnel.
2°) Si x^9 et x^{12} sont rationnels, alors x est rationnel.

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2} + \sqrt{(x-1)^2} = 1$.

13 On considère le sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ défini par $\mathrm{A} = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Démontrer que A possède une borne inférieure et une borne supérieure, et les déterminer.

14 Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

En déduire la partie entière du réel $x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}\right)$.

15 Soit n un entier naturel non nul. On considère une famille $(x_i)_{i\in[\![0\,;n]\!]}$ de réels tels que
$0 \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \ \ldots\ < x_n \leqslant 1$.

Démontrer qu'il existe deux entiers naturels i et j distincts appartenant à $[\![0\,;n]\!]$ tels que $|\,x_i - x_j\,| \leqslant \frac{1}{n}$.

16 Soit x un réel fixé.

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{E}\left(\binom{n}{k}x\right)$.

1°) Déterminer u_n pour $x \in \mathbb{Z}$.
2°) Déterminer la limite de u_n pour x réel quelconque.

17 Pour tout réel $x \geqslant 1$ simplifier $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

18 Soit n un entier naturel non nul. On considère une famille $(a_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ de réels positifs ou nuls.

Démontrer que l'on a : $\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\sum\limits_{j=i}^{n} a_j} \geqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 a_i}$.

19 Pour tout réel x, on pose $\mathrm{A}(x) = \mathrm{E}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ (la fonction A est appelée **fonction arrondi à l'unité**).

1°) Démontrer que $\mathrm{A}(x)$ est l'entier le plus proche de x.
Indications : Calculer d'abord $\mathrm{A}(1{,}1)$, $\mathrm{A}(1{,}5)$, $\mathrm{A}(1{,}9)$, puis $\mathrm{A}(x)$ pour $x \in [0{,}5\,;1{,}5[$ et $x \in [1{,}5\,;2{,}5[$.

b) Calculer $\frac{\mathrm{A}(10x)}{10}$ et $\frac{\mathrm{A}(100x)}{100}$ pour $x = 2{,}71828$ ($\approx$ e). Conclusion ?

20 Soit a, b, c trois réels.
1°) Développer le produit $(a+b+c)(ab+bc+ac)$.
2°) Développer $(a+b+c)^2$ et $(a+b+c)^3$.
3°) Démontrer que si $a+b+c=0$, alors $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.

Voir ex. 70

21 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{E}(x^n) = x$.

22 Soit $\left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ une famille de réels. Voir exercice **5**. Les énoncés sont différents.

On pose $A=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}\left(a_{i,j}\right)\right)$ et $B=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant p}\left(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(a_{i,j}\right)\right)$.

Démontrer que l'on a : $B\leqslant A$.

23 1°) Étudier les variations de la fonction $f : x\mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

2°) Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a\leqslant b$. Comparer $\sqrt[a]{b}$ et $\sqrt[b]{a}$.

3°) Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $\text{A}=\left\{\min\left(\sqrt[a]{b}\,;\sqrt[b]{a}\right),\ a\in\mathbb{N}^*,\ b\in\mathbb{N}^*\right\}$.

Démontrer que A admet un maximum que l'on déterminera.

24 Soit x_1, x_2, …, x_n n réels de l'intervalle [0, 1].

Démontrer que $\min\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i,\ \prod\limits_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)\right)\leqslant\dfrac{1}{2^n}$.

25 On pose $\mathcal{A}=\left\{\sqrt{m}-\sqrt{n},\ (m,n)\in\mathbb{N}^2\right\}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1°) Soit ε un réel strictement positif.
Démontrer qu'il existe un réel $a\in\mathcal{A}$ tel que $0<a<\varepsilon$.
Indication : On pourra considérer la suite $\left(u_n\right)$ définie par $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
2°) Soit x et y deux réels tels que $0<x<y$. On pose $\varepsilon=y-x$.
Déduire de la question 1°) l'existence d'un réel $a'\in\mathcal{A}$ tel que $x<a'<y$.
3°) Conclure.

26 1°) Écrire en langage naturel un algorithme utilisant une boucle « Tantque » qui permet de saisir un réel x positif quelconque et qui donne en sortie le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x sans s'occuper de la longueur de l'algorithme. Faire l'organigramme correspondant.
2°) Pour tout réel x, on note $f(x)$ le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x.

Exprimer $f(x)$ en fonction de x en utilisant la partie entière.

27 On pose $I=[0\,;1]$. Soit f une fonction croissante de I dans I.

On considère les ensembles $\text{A}=\left\{x\in I\ /\ f(x)\geqslant x\right\}$ et $\text{B}=\left\{x\in I\ /\ x\geqslant f(x)\right\}$.

1°) a) Démontrer que A est non vide et admet une borne supérieure c.
b) Démontrer que A est stable par f.
c) Démontrer que c est un point fixe de f (c'est-à-dire $f(c)=c$).
2°) Démontrer que B est non vide et admet une borne inférieure d qui est un point fixe de f.
On peut remplacer $[0\,;1]$ par $[a\,;b]$.

28 On considère l'ensemble $\text{A}=\left\{\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n},\ (m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$.

Déterminer les bornes supérieure et inférieure de A.

29 **Partie 1**
L'objectif de cette partie est de déterminer tous les entiers naturels a, b et n tels que $a!+b!=n!$.
On suppose qu'une telle solution existe.
1°) Démontrer que $n\geqslant 1$ et que $n!\leqslant 2(n-1)!$.
2°) En déduire que $n\leqslant 2$ et que a et b sont inférieurs ou égaux à 1.
3°) Tester toutes les solutions avec a et b dans $[\![0\,;1]\!]$ et n dans $[\![1\,;2]\!]$.
4°) Conclure sur l'ensemble des solutions.
Partie 2
L'objectif de cette partie est de déterminer tous les entiers naturels a, b, c et n tels que $a!+b!+c!=n!$.
On suppose qu'une telle solution existe.
1°) Démontrer que $n\geqslant 1$ et que $n!\leqslant 3(n-1)!$.
2°) En déduire que $n\leqslant 3$ et que a, b, c sont inférieurs ou égaux à 2.
3°) Tester toutes les solutions avec a, b, c dans $[\![0\,;2]\!]$ et n dans $[\![1\,;3]\!]$.
On pourra utiliser un programme Python qui teste toutes les solutions avec a, b, c dans $[\![0\,;2]\!]$ et n dans $[\![1\,;3]\!]$.
4°) Conclure sur l'ensemble des solutions.

30 Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et on pose $E=\mathbb{R}^n$.
Soit $a=\left(a_1,\dots,a_n\right)$ et $b=\left(b_1,\dots,b_n\right)$ deux éléments de E que l'on a pourra assimiler à des suites finies de réels.

On dit que a et b vérifient la condition (S) lorsque $\forall (i,\ j)\in[\![1\,;n]\!]^2\quad \left(a_i-a_j\right)\left(b_i-b_j\right)\geqslant 0$. Dans ce cas, on peut dire que les suites a et b sont synchrones.
1°) Dans cette question, on prend $n=3$.
Démontrer que les suites $a=(4,1,2)$ et $b=(1,-1,0)$ vérifient la condition (S).
2°) Justifier que la condition (S) est vérifiée dans chacun des cas suivants :
- l'une des deux suites a ou b est constante ;
- les deux éléments a et b de E ont la même monotonie ;
- $b=\lambda a$ où λ est un réel positif ou nul ;
- $b=a+(\lambda,\lambda,\dots,\lambda)$ où λ est un réel quelconque.

3°) Soit a et b deux éléments de E vérifiant la condition (S).

Démontrer que l'on a $\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right)\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$.

Indication : On pose $c_{i,j}=\left(a_i-a_j\right)\left(b_i-b_j\right)$ et $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}c_{i,j}$.

Démontrer que $S=2n\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k\right)-2\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n}b_k\right)$.

31 Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n non nul on a : $\text{E}\left(\dfrac{\text{E}(nx)}{n}\right)=\text{E}(x)$.

Indication : Introduire, pour n entier naturel non nul fixé, la fonction $f:\ x\mapsto \text{E}\left(\dfrac{\text{E}(nx)}{n}\right)-\text{E}(x)$ et démontrer que f est périodique de période 1.

$\boxed{32}$ On considère l'ensemble $E=\left\{(-1)^n+\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$.
Déterminer les bornes supérieure et inférieure de E.

$\boxed{33}$ Résoudre dans $\left(\mathbb{N}^*\right)^2$ l'équation $a^b=b^a$.

Indication : Considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

$\boxed{34}$ 1°) Démontrer que le nombre de chiffres dans l'écriture en base dix d'un entier naturel $N\geqslant 1$ est égal à $E(\log N)+1$.

2°) **Application**

Le plus grand nombre premier connu en 1999 était $2^{6972593}-1$ (découvert par Hajratwala, Woltman et Kurovski).
Avec combien de chiffres s'écrit-il en base dix ? (utiliser la calculatrice.)

$\boxed{35}$ 1°) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$. idem $\boxed{23}$.

2°) Soit A la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A=\left\{\min\left(\sqrt[a]{b}\,;\sqrt[b]{a}\right),\ (a\,;b)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$.

Démontrer que A un maximum que l'on déterminera.

$\boxed{36}$ 1°) Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ (tableau de variations complet avec les limites).

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto E\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.

Déterminer l'expression de g suivant les valeurs de x. Tracer la représentation graphique de g.

$\boxed{37}$ Soit n un entier naturel non nul.

On se propose de démontrer que pour tout réel x, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)=E(nx)$.

Pour cela, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x+\frac{k}{n}\right)-E(nx)$.

1°) Démontrer que f est périodique de période $\dfrac{1}{n}$.

2°) Calculer $f(x)$ pour $x\in\left[0\,;\dfrac{1}{n}\right[$.

3°) Conclure.

$\boxed{38}$ Soit n et m deux entiers relatifs.

Démontrer que l'on a : $E\left(\dfrac{n+m}{2}\right)+E\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right)=n$.

$\boxed{39}$ 1°) Soit a un réel supérieur ou égal à – 2.
Démontrer que si a est un nombre irrationnel, alors $\sqrt{2+a}$ est aussi un nombre irrationnel.
2°) Soit (x_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $x_0=\sqrt{2}$ et par la relation de récurrence $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ pour tout entier naturel n.
Démontrer que tous les termes de la suite (x_n) sont irrationnels.

$\boxed{40}$ 1°) Démontrer que pour tout couple $(m\,;n)$ d'entiers naturels non nuls on a $0\leqslant\dfrac{mn}{(m+n)^2}\leqslant\dfrac{1}{4}$.

2°) On pose $A=\left\{\dfrac{mn}{(m+n)^2},\ (m\,;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$.

Démontrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure puis les déterminer.
3°) L'ensemble A admet-il un maximum ? un minimum ?

$\boxed{41}$ Soit ABC un triangle quelconque du plan. On pose $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$.
Démontrer que l'on a : $a^4+b^4+c^4\leqslant 2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)$.
À quelle condition y a-t-il égalité ?
Indication : Développer le produit $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$.

$\boxed{42}$ Soit x et y deux réels positifs quelconques.
Démontrer que l'on a : $1+\sqrt{xy}\leqslant\sqrt{(1+x)(1+y)}$. À quelle condition y a-t-il égalité ?

$\boxed{43}$ Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sigma(k)\leqslant\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

$\boxed{44}$ Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).

Démontrer que l'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k\sigma(k)}\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

$\boxed{45}$ On considère trois suites finies $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ et $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de réels.

On suppose que l'on a $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n\geqslant 0$ et que pour tout entier $k\in\{1, 2, \ldots, n\}$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_i\leqslant\sum_{i=1}^{k} c_i$.

Démontrer que l'on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\geqslant\sum_{k=1}^{n} a_kc_k$.

Indication : On commencera par démontrer que le membre de gauche de l'inégalité peut s'écrire
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} B_k\left(a_k-a_{k+1}\right)+a_nB_n$ avec $B_k=\displaystyle\sum_{i=1}^{k} b_i$.

$\boxed{46}$ À l'aide de la calculatrice, conjecturer la partie entière de $\sqrt{n^2+1}$ pour tout entier naturel n non nul.
Démontrer cette conjecture.

$\boxed{47}$ Soit a, b, c trois réels quelconques.
À l'aide de l'expression $A=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$, démontrer que $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$ et préciser le cas d'égalité.

$\boxed{48}$ Soit a, b, c trois réels tels que $|a-b|\geqslant|c|$, $|b-c|\geqslant|a|$, $|c-a|\geqslant|b|$.
Démontrer que l'un des réels est la somme des deux autres.

$\boxed{49}$ Soit x et y deux réels tels que pour tout entier naturel n on ait $\mathrm{E}(nx)=\mathrm{E}(ny)$.
Démontrer que $x=y$.

$\boxed{50}$ Soit x un réel quelconque.
Exprimer $\mathrm{E}(-x)$ en fonction de $\mathrm{E}(x)$.
1[er] cas : $x\in\mathbb{Z}$ 2[e] cas : $x\notin\mathbb{Z}$

$\boxed{51}$ 1°) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$ on a $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$.

2°) Soit n un entier naturel non nul et $(x_1, x_2, ..., x_n)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. On pose $U=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ et $V=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i}$.

Démontrer que $UV=n+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\dfrac{x_i}{x_j}+\dfrac{x_j}{x_i}\right)$. En déduire que $UV\geqslant n^2$.
Dans quel cas y a-t-il égalité ?
Retrouver l'inégalité en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$\boxed{52}$ On pose $\mathrm{A}=\left\{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{mn},\ (m\,;n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right\}$.
Démontrer que A admet une borne inférieure et une borne supérieure puis les déterminer.
L'ensemble A admet-il un maximum ? un minimum ?

$\boxed{53}$ Pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on pose $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que S_n n'est jamais un entier pour $n\geqslant 2$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p l'unique entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $2^p\leqslant n<2^{p+1}$.

En isolant le terme $\dfrac{1}{2^p}$, justifier que $S_n=\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{N}{2^{p-1}q}$ avec q entier naturel impair et N entier naturel.

Conclure.

$\boxed{54}$ Soit n un entier naturel non nul et $(a_1, a_2, ..., a_n)\in\mathbb{R}^n$.
On note $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ une famille de réels égaux à 1 ou à – 1.

Démontrer que $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i a_i\right|\leqslant\left|\sum\limits_{i=1}^{n} {a_i}^2\right|\times\sqrt{n}$.

$\boxed{55}$ Soit x un réel tel que $\dfrac{x}{x^2+1}$ soit irrationnel.
Peut-on en déduire que x est irrationnel ?

$\boxed{56}$ Soit n un entier naturel quelconque.
1°) Démontrer que $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$.
2°) On pose $d=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+1}\right)$. Démontrer que l'inégalité $\sqrt{4n+2}\geqslant d+1$ est impossible.
3°) En déduire que $\mathrm{E}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)=d$.

Comparer $\mathrm{E}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$ et $\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+2}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Le 9 mars 2022
Alain Troesh Exercices sur les réels

Démontrer que pour tout entier naturel n on a $\mathrm{E}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+1}\right)=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+2}\right)=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+3}\right)$.

$\boxed{57}$ Soit x et y deux nombres rationnels positifs ou nuls. On pose $\mathrm{A}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ et $\mathrm{B}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.
1°) Démontrer que si A est un nombre rationnel, alors B est aussi un nombre rationnel.
En déduire que si A est un nombre rationnel, alors $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont aussi des nombres rationnels.
2°) On suppose que l'un au moins des nombres $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ est irrationnels.
- Quelle est la nature du nombre A ?
- On suppose de plus que x et y sont distincts. Quelle est la nature du nombre B ?

Soit x et y deux réels tels que la somme et la différence soient des nombres rationnels.
Que peut-on dire de x et y ?
Soit x et y deux entiers dont la somme et le produit sont des nombres rationnels.
Ces nombres sont-ils nécessairement rationnels.

$\boxed{58}$ Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée et on note $\mathrm{M}=\sup \mathrm{A}$. On suppose que $\mathrm{M}\notin\mathrm{A}$.
Démontrer que, pour tout $\varepsilon>0$, l'intervalle $]\mathrm{M}-\varepsilon, \mathrm{M}[$ contient une infinité d'éléments de A.

$\boxed{59}$ Soit a et b deux réels tels que $a\leqslant b$.
Déterminer $[a, b]\cap\mathbb{Z}$; en déduire $\mathrm{card}\left([a, b]\cap\mathbb{Z}\right)$.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $[a, b]\cap\mathbb{Z}$ soit vide puis soit non vide.

$\boxed{60}$ 1°) a) Justifier que pour tout réel x, on a $x(1-x)\leqslant\dfrac{1}{4}$.
b) Soit a, b, c trois réels positifs ou nuls.
Démontrer que l'un au moins des nombres suivants est inférieur à $\dfrac{1}{4}$:

$$a(1-b) \qquad b(1-c) \qquad c(1-a)$$

2°) En adaptant le raisonnement précédent, justifier que, parmi les trois nombres $a+\dfrac{1}{b}$, $b+\dfrac{1}{c}$, $c+\dfrac{1}{a}$, il existe au moins un nombre supérieur à 2.

Soit σ une permutation de l'ensemble $\{1\,;2\,;...\,;n\}$ (n est un entier naturel supérieur ou égal à 1).
Soit $(x_1, x_2, ..., x_n)$ une suite finie de réels.
Démontrer que l'un au moins des produits $x_i\left(1-x_{\sigma(i)}\right)$ est inférieur ou égal à $\dfrac{1}{4}$.

$\boxed{61}$ Fraction médiane voir Rémy Nicolaï

$\boxed{62}$ Soit a et b deux réels.
Déterminer a et b tels que l'application $f: x\mapsto ax+b|x|$ soit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

63 Déterminer les fonctions affines f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Déterminer les fonctions affines f définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ f = -\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

64 On considère la fonction $f : x \mapsto 3x+2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer les fonctions affines g définies sur $\mathbb{R}$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

65 Soit f une fonction affine.
Déterminer les fonctions polynômes P du second degré telles que $P \circ f = f \circ P$.

66 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et σ une bijection de l'ensemble $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$ dans lui-même.

Démontrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{\sigma(i)}} \geqslant n$.

67 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1 ; y_2 ; ... ; y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Démontrer que : $2\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

Préciser le cas d'égalité.
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Soit $(x_1 ; x_2 ; ... ; x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ et σ une bijection de l'ensemble $\{1 ; 2 ; ... ; n\}$ dans lui-même.

Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i x_{\sigma(i)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Préciser dans quel cas il y a égalité.

68 Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I = [0 ; 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Démontrer qu'il existe un couple $(x ; y) \in I^2$ tel que $\left| xy - f(x) - g(y) \right| \geqslant \dfrac{1}{4}$.

Indication : Raisonner par l'absurde et considérer les quatre couples particuliers $(0 ; 0)$, $(0 ; 1)$, $(1 ; 0)$, $(1 ; 1)$.

69 Déterminer $\displaystyle\bigcup_{a \in]1 ; +\infty[} \left]\frac{1}{a} ; a\right[$ et $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]\frac{1}{n} ; n\right[$.

70 Soit x, y, z trois nombres réels.
Démontrer que $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)\left[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\right]$.

En déduire une condition nécessaire sur x, y, z pour que $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Comparer $x^3 + y^3 + z^3$ et $3xyz$.

71 Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a $n < \sqrt{n^2+1} < n+1$.
En déduire :
- la partie entière de $\sqrt{n^2+1}$;
- que n^2+1 n'est pas un carré parfait.

72 1°) Démontrer que pour tout réel x strictement positif on a $x < \sqrt{x^2+x} < x+1$.
2°) En déduire pour tout entier naturel n non nul :
- la partie entière de $\sqrt{n^2+n}$
- n^2+n n'est pas un carré parfait.

3°) Déterminer la nature des nombres $a = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ et $b = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour n entier naturel quelconque.

73 On suppose que I et J sont deux intervalles.
1°) Démontrer que I ∩ J est un intervalle.
2°) Démontrer que $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \{i + j, (i, j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}\}$ est un intervalle.
Le mieux est d'utiliser la caractérisation des intervalles par la convexité. Sinon, pour la question 2°), on peut aussi distinguer 100 cas (si l'on procède ainsi, n'en traiter qu'un seul, mais le choisir suffisamment représentatif.)

74 Soit a_1, a_2, …, a_n n réels.
Pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, on pose $I_k = [a_k ; +\infty[$ et $J_k =]-\infty ; a_k]$.

Déterminer $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} I_k$ et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} I_k$. Idem avec les J_k.

75 Démontrer que $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$ implique $-1 < xy < 1$.

76 On pose $\mathrm{A} = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$.
Calculer A^2. En déduire une écriture simplifiée de A.

77 Démontrer que pour tout réel x, on a $\mathrm{E}(-x) + \mathrm{E}(x) = 1_{\mathbb{Z}}(x) - 1$.

78 Un carré et un disque ont la même aire.
Laquelle des deux figures a le plus grand périmètre ?

Un carré et un disque ont le même périmètre.
Laquelle des deux figures a la plus grande aire ?

79 Déterminer la partie entière du réel $x = \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2+1}}}}$ où n est un entier naturel quelconque non nul.

80 À tout réel $a > 0$ on associe la fonction $f_a : x \mapsto \mathrm{E}(ax) - a\mathrm{E}(x)$.
1°) Démontrer que pour tout réel x on a $-1 < f_a(x) < a$.
2°) En déduire que si $a \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_a est à valeurs dans $[\![0 ; a-1]\!]$. Démontrer également que f_a est périodique.

81 Déterminer la nature du réel $\sqrt{n^2+1}$ où n est un entier naturel quelconque non nul.

$\boxed{82}$ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On pose $E = [\![1\,;n]\!]$.

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels quelconques.

Démontrer que : $\displaystyle\sum_{(i\,;\,j)\in E^2} \frac{a_i a_j}{i+j} \geqslant 0$.

Indication : Considérer la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{(i\,;\,j)\in E^2} \frac{a_i a_j x^{i+j}}{i+j}$.

$\boxed{83}$ Soient a, b et c trois réels strictement positifs et tels que : $b+c>a$, $a+b>c$ et $a+c>b$.

Démontrer que : $\dfrac{a}{b+c} < \dfrac{2a}{a+b+c}$ puis que $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}<2$.

$\boxed{84}$ 1°) a) Démontrer que, pour tous réels strictement positifs x et y, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geqslant 2$.

b) Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

2°) Soit a, b et c des réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité précédente successivement avec $x=a+b$ et $y=a+c$ puis $x=b+c$ et $y=a+b$ et enfin $x=b+c$ et $y=a+c$, démontrer que

$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

$\boxed{85}$ Démontrer que pour tout couple (a,b) de réels on a $\mathrm{E}(a)+\mathrm{E}(b)\leqslant \mathrm{E}(a+b)\leqslant \mathrm{E}(a)+\mathrm{E}(b)+1$.

Le 30-10-2023

$\mathrm{A}=\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}$ idée tirée du test 1 de Clément Dunand 2023-2024

$\mathrm{A}^2=8+2\sqrt{9}$

$=8+6$

$=14$

$\left(\sqrt{14}+\sqrt{2}\right)^2=16+4\sqrt{7}$

Le lundi 26 novembre 2022

Mélanie Blazère TD 4

Pour quelles valeurs de n a-t-on $n!\geqslant 2^n$?

Le 12 novembre 2022

Inégalité de Bernoulli

$(1+h)^n\geqslant 1+nh$ fournit $2^n\geqslant 1+n$

Retrouver avec les ensembles card $\mathcal{P}(E)=2^n$

Le 14 novembre 2022

14 h - 15 h

encadrement de factorielle $2^n\leqslant n!\leqslant n^n$

On peut obtenir $n!\leqslant\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ DS1 Hervé Fabbro 2022-2023

Le 22 novembre 2022

DS1 Hervé Fabbro 2022-2023

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$

Le dimanche 20 novembre 2022

matin

Hervé Fabbro ECG

Feuille raisonnements

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 2^n\leqslant n!\leqslant n^n$.

Feuille calculs

n entier naturel non nul

On pose $P_p(x)=1+x^{3^p}+x^{2\times 3^p}$.

$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} P_p(x)=\frac{x^{3^n}-1}{x-1}$ pour $x\neq 1$

Questions de cours

Autour de l'axiomatique de $\mathbb{R}$

$\boxed{1}$ Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (sauts et petits bonds).

Démontrer que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels et une infinité d'irrationnels.

$\boxed{2}$ Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

$\boxed{3}$ Irrationalité de $\sqrt{2}$.
Démontrer que l'ensemble $\left\{x \in \mathbb{Q} \,/\, x^2 < 2\right\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

$\boxed{4}$ Partie entière d'un réel : définition ; propriétés (énoncés et démonstrations) ; représentation de la fonction partie entière.
Recopier et compléter : $\mathrm{E}(x) = \max\{................\}$.

$\boxed{5}$ Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

$\boxed{6}$ Définir $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$. Lien entre les deux ? Faire la démonstration.

$\boxed{7}$ Exprimer le maximum et le minimum de deux réels à l'aide de la valeur absolue.

$\boxed{8}$

Le 8-11-2023

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
$I \bigcup J$ est un intervalle si et seulement si $I \bigcap J \neq \varnothing$.

Le mercredi 22-11-2023

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- $I \bigcap J \neq \varnothing \Rightarrow I \bigcup J$ est un intervalle

- $I \bigcap J = \varnothing \Rightarrow I \bigcup J$ n'est pas un intervalle (en supposant que I et J sont non vides)

équivalence

$\boxed{6}$ On a $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$.

$\boxed{7}$ Démonstration :

On utilise les égalités $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$ et $\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y|$.

Le 20-7-2016

Je tape une feuille sur laquelle j'avais écrit la démonstration de la densité des irrationnels.

$\exists \mathrm{A} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\mathrm{I} =]a, b[$

Caractère archimédien entre $b - a$ et A

$\exists q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\mathrm{A} < q(b - a)$

$$\frac{\mathrm{A}}{q} < b - a$$

En appliquant le caractère archimédien entre $\dfrac{\mathrm{A}}{q}$ et a

$\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{p\mathrm{A}}{q} \in]a, b[$

J'avais ensuite écrit sur la même feuille :
$\dfrac{1}{n} < b - a$
$\dfrac{1}{n} < a$
$\exists m$

Mais je doute que ce soit pour ça.

Réponses

1 Conditions d'existence :

$a \geqslant 0$; $b \geqslant 0$ d'où $\sqrt{a} \leqslant 1$ et $\sqrt{b} \leqslant 1$
Donc $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$.

On raisonne avec des implications.
$a^2 - 2a + \sqrt{a} = 0$
$\sqrt{a}\left(a\sqrt{a} - 2\sqrt{a} + 1\right) = 0$
Polynôme $x^3 - 2x + 1 = (x-1)\left(x^2 - x + 1\right)$
(1 ; 0), (0 ; 1), $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} ; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$
On vérifie que les deux premiers couples sont solutions ; on exclut les deux suivants à cause des conditions d'existence.

2 **3** Élever les deux membres au carré.

4 Envisager 3 cas : si $x > 1$, alors $x^3 + 6x \geqslant 2$ est vraie ; si $x < -1$, alors $x \leqslant -\dfrac{1}{3}$ est vraie ; si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, alors $x^2\left(3 - |x|\right) \geqslant 0$ est vraie.

5

6 Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a : $n < n+1$ donc $n^2 < n(n+1)$.
Par suite, $n < \sqrt{n(n+1)}$. Par suite, $2n < 2\sqrt{n(n+1)}$.
On sait que pour tout couple $(a ; b) \in \left(\mathbb{R}_+\right)^2$, $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$.
On en déduit que $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2n < 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathrm{E}\left(2\sqrt{n(n+1)}\right) = 2n$.

11 1°) Vrai. Pour x non nul, on calcule $\dfrac{x^{12}}{x^7} = x^5$; $\dfrac{x^7}{x^5} = x^2$; $\dfrac{x^5}{x^2} = x^3$; $\dfrac{x^3}{x^2} = x$ rationnels
Penser à Bezout : 7 et 12 sont premiers entre eux.
$3 \times 12 - 7 \times 5 = 1$
$\dfrac{\left(x^{12}\right)^3}{\left(x^7\right)^5} = x$
La démarche faite au-dessus est plutôt une démarche du genre Euclide (différences successives).
2°) Faux.
Il suffit de choisir un réel x tel que $x \notin \mathbb{Q}$ et $x^3 \in \mathbb{Q}$.
On peut choisir $x = \sqrt[3]{2}$ (on admet que $\sqrt[3]{2}$ est irrationnel ; ça se démontre).

13 Max : 2 ; Borne inf : – 1.

Solution détaillée :

$$\mathrm{A} = \left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

Démontrons que A possède une borne inférieure et une borne supérieure, et les déterminer.

Démontrons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists n \in \mathbb{N} \quad \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{n} \leqslant -1 + \varepsilon$.

$$\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\iff n \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$$

On pose $n = 4k+3$.

D'où $4k + 3 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$
$$k \geqslant \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{3}{4}$$
$$k \geqslant \mathrm{E}\left(\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{3}{4}\right) + 1$$

$$u_{4k+3} = -1 + \frac{1}{4k+3} \leqslant \varepsilon - 1$$

15 Deux démonstrations possibles :
1ère démonstration : par l'absurde.
2e démonstration : considérer le minimum m des $\left|x_i - x_j\right|$.
On a : $x_n - x_0 = \underbrace{\left(x_n - x_{n-1}\right)}_{>0} + \ldots + \underbrace{\left(x_1 - x_0\right)}_{>0}$.
On a donc : $1 \geqslant x_n - x_0 \geqslant n \times m$ d'où $m \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3e démonstration : principe des tiroirs de Dirichlet
On découpe l'intervalle [0, 1] en n intervalles.

Version de Paul Dario (29-11-2013) :

$0 \leqslant x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$

Démontrons qu'il existe deux entiers i et j de $[\![0 ; n]\!]$, $i \neq j$, tels que $\left|x_i - x_j\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

On introduit les intervalles : $\left[0 ; \dfrac{1}{n}\right]$, $\left[\dfrac{1}{n} ; \dfrac{2}{n}\right]$, …, $\left[\dfrac{n-1}{n} ; 1\right]$.

On a donc n intervalles.
$(n+1)$ valeurs de x possibles.

Donc d'après le théorème des tiroirs, $\exists (i, j) \in [\![0 ; n]\!]^2 \quad i \neq j$ tel que x_i et x_j sont dans le même intervalle.

Or les intervalles ont tous pour longueur $\dfrac{1}{n}$.

On aura donc dans ce cas : $\left| x_i - x_j \right| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{17}$ Il y a deux cas suivant que $1 \leqslant x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 2$.

$\boxed{18}$ On pose $\alpha_i = \sqrt{a_i}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=i}^{n} a_j} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{j=i}^{n} \alpha_j^{\,2}} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{0^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 + \alpha_i^{\,2} + \ldots + \alpha_n^{\,2}} = \sum_{i=1}^{n} \| U_i \| \geqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} U_i \right\|$$

$U_i = (0\,;0\,;\ldots;0\,;\alpha_i\,;\alpha_{i+1}\,;\ldots;\alpha_n)$

$\sum_{i=1}^{n} U_i = (\alpha_1\,;2\alpha_2\,;\ldots;\ldots;n\alpha_n)$

$\boxed{22}$

$I = [\![1\,;n]\!]$ et $J = [\![1\,;p]\!]$.

On pose $A = \min\limits_{i \in I} \left(\max\limits_{j \in J} (a_{i,j}) \right)$ et $B = \max\limits_{j \in J} \left(\min\limits_{i \in I} (a_{i,j}) \right)$.

Démontrer que l'on a : $B \leqslant A$ soit $\max\limits_{j \in J} \left(\min\limits_{i \in I} (a_{i,j}) \right) \leqslant \min\limits_{i \in I} \left(\max\limits_{j \in J} (a_{i,j}) \right)$.

Soit i fixé dans I.

$\max\limits_{j \in J} (a_{i,j}) = a_{i,j_0}$

$a_{i,j_0} \geqslant \min\limits_{k \in I} (a_{k,j})$

Donc $a_{i,j_0} \geqslant \min\limits_{k \in I} (a_{k,j})$

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On pose $I = [\![1\,;n]\!]$ et $J = [\![1\,;p]\!]$. Voir exercice $\boxed{22}$.

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels.

Démontrer que $\max\limits_{i \in I} \left(\min\limits_{j \in J} a_{i,j} \right) = \min\limits_{j \in J} \left(\max\limits_{i \in I} a_{i,j} \right)$.

On pose $A = \min\limits_{j \in J} \left(\max\limits_{i \in I} a_{i,j} \right) \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} (a_{i,j}) \right) \max\limits_{i \in I} \left(\min\limits_{j \in J} a_{i,j} \right) =$ et $B = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} \left(\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_{i,j}) \right)$.

Démontrer que l'on a : $B \leqslant A$.

$\boxed{23}$ 3°) $m(a,b) = \min\left(\sqrt[a]{b}, \sqrt[b]{a} \right)$

Si $a \leqslant b$, alors $a \ln a \leqslant b \ln b$ d'où $\dfrac{\ln a}{b} \leqslant \dfrac{\ln b}{a}$.

$\sqrt[b]{a} \leqslant \sqrt[a]{b}$

$m(a,b) = \sqrt[b]{a} = \mathrm{e}^{\frac{\ln a}{b}}$

$\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{b}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\ln b}{b}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{3}} = \sqrt[3]{3}$

$\boxed{24}$ Raisonner par l'absurde. On utilise l'inégalité suivante : $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

On a : $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i (1 - x_i) \leqslant \dfrac{1}{4^n}$ d'où $\left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \right) \left[\prod\limits_{i=1}^{n} (1 - x_i) \right] \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

$\boxed{25}$ 2°) Il existe un réel $a \in \mathcal{A}$ tel que $0 < a < \varepsilon$.

On a : $\dfrac{\varepsilon}{a} > 1$ soit $\dfrac{y}{a} - \dfrac{x}{a} > 1$.

L'intervalle $\left] \dfrac{x}{a} \,; \dfrac{y}{a} \right[$ contient donc au moins un entier relatif N.

3°) $x < 0 < y$; $0 \leqslant x < y$; $x < y \leqslant 0$

$\boxed{26}$

1°)

Entrée :
Saisir x

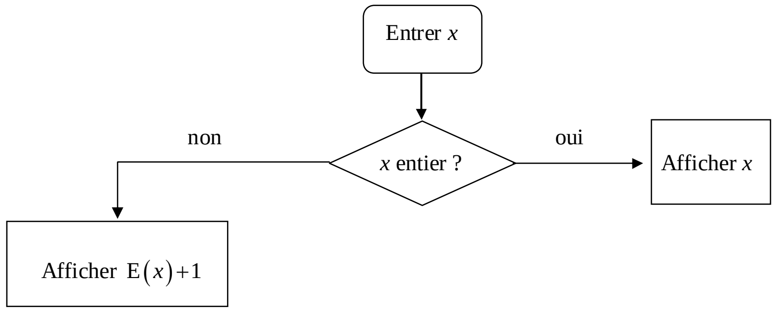
Initialisation :
i prend la valeur 0

Traitement :
Tantque $i < x$ **Faire**
  i prend la valeur $i+1$ (on « incrémente » i)
FinTantque

Sortie :
Afficher i

Question : Si on veut que l'algorithme marche pour les nombres négatifs, on est obligé de faire une « dichotomie » au départ : x positif ? x négatif ?
Dans le cas où x est négatif, on ajoute – 1.

Autre proposition d'algorithme (sans boucle) :



2°) $f(x)=-\mathrm{E}(-x)$
Démonstration :

Si $x \in \mathbb{Z}$, la formule marche.

Si $x \notin \mathbb{Z}$, $n < x < n+1$ donc $-n > -x > -n-1$.

Donc $\mathrm{E}(-x)=-n$ d'où le résultat.

$\boxed{28}$ $\mathrm{A}=\{x\in[0\,;1]\,/\,f(x)\geqslant x\}$ et $\mathrm{B}=\{x\in[0\,;1]\,/\,x\geqslant f(x)\}$

1°) Démontrer que A est non vide et que sa borne supérieure c est un point fixe de f (c'est-à-dire $f(c)=c$).

On pose $c=\sup A$.
Il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers c.
De plus, on peut supposer que (x_n) est croissante.
$\forall n\in\mathbb{N} \quad f(x_n)\geqslant x_n$

Or c est un majorant de A donc $\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n\leqslant c$ et comme f est croissante, $f(x_n)\leqslant f(c)$.
Par conséquent, $\forall n\in\mathbb{N} \quad x_n\leqslant f(x_n)\leqslant f(c)$.
Par le TPLI, on en déduit que $c\leqslant f(c)$.
Par conséquent, on a démontré que $c\in A$.
On démontre aisément que l'ensemble A est stable par f c'est-à-dire que si $x\in A$, alors $f(x)\in A$.

Or $c\in A$ donc $f(c)\in A$.

On en déduit que $f(c)\leqslant c$.

En rassemblant tous les résultats, on en déduit que $f(c)\leqslant c$.

2°) Démontrer que B est non vide et que sa borne inférieure d est un point fixe de f.

$\boxed{29}$

Partie 2

1°)
$z=t$ impossible
$z>t$ impossible

2°) $(z+1)!\leqslant t!\leqslant 3z!$

3°) $z+1\leqslant \dfrac{t!}{z!}\leqslant 3$

$z+1<3$
$z\leqslant 2$

Envisager tous les cas
$(2,2,2,3)$

$z=0$ impossible
$z=1 \quad x\leqslant y\leqslant 1=t!$
$z=2$

$\boxed{30}$

Voir inégalité de Grüss sur les suites finies :
5°) cas d'égalité lorsque l'une des deux suites est constante
6°) inégalité de Cauchy-Schwarz

Le résultat donné ici débouche facilement sur l'inégalité en version continue.

Le dimanche 4 octobre 2020, j'avais noté inégalité de Grüss / fonctions synchrones.

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$$

Le 21 octobre 2023

Exercice sur les réels PCSI M. Kaddouri

$$S=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)$$

Démontrer que $S=n\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$.

$\boxed{31}$

$$\mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right)=\mathrm{E}(x)$$

Vérifier cet énoncé car sur la feuille où j'avais écrit l'énoncé était marqué : Pour tout réel x et pour tout entier relatif n …

1°) $f:\ x\mapsto \mathrm{E}\left(\dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n}\right)-\mathrm{E}(x)$

$$f(x+1) = \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx+n)}{n}\right) - \mathrm{E}(x+1)$$
$$= \mathrm{E}\left(\frac{\mathrm{E}(nx)}{n}+1\right) - \mathrm{E}(x) - 1$$
$$= f(x)$$

2°) Soit $x \in [0\,;1[$.

$0 \leqslant x < 1$
$0 \leqslant nx < n$
$0 \leqslant \mathrm{E}(nx) < n$
$0 \leqslant \dfrac{\mathrm{E}(nx)}{n} < 1$

$\boxed{32}$

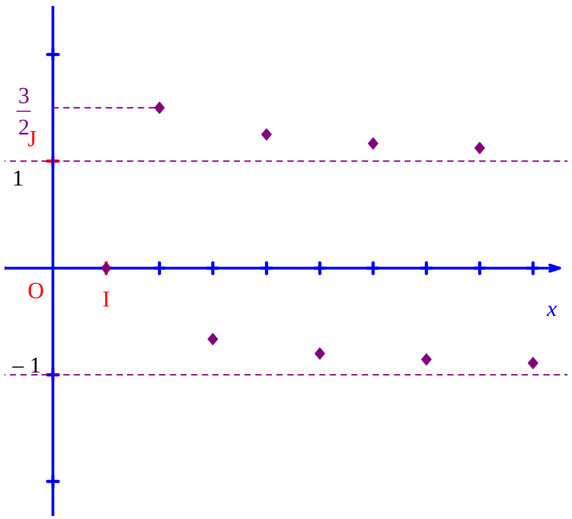
$\sup E = \max E = \dfrac{3}{2}$

$\inf E = -1$

Le mieux est de représenter graphiquement la suite.

La borne supérieure est atteinte en 2. C'est un élément isolé de l'ensemble.

Lorsque l'on a une suite convergente, $\inf \{u_n, n \in \mathbb{N}\} = \lim u_n$.



(u_{2n}) est décroissante majorée par $\dfrac{3}{2}$.

(u_{2n+1}) est décroissante minorée par – 1.

$u_{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$

$u_{2n+1} = -1 + \dfrac{1}{2n+1}$

$\boxed{35}$

$m(a\,;b) = \min\left(\sqrt[a]{b}\,;\sqrt[b]{a}\right)$

Si $a \leqslant b$, alors $a \ln a \leqslant b \ln b$

Donc $\dfrac{\ln a}{b} \leqslant \dfrac{\ln b}{a}$

$\sqrt[a]{b} \leqslant \sqrt[b]{a}$

$m(a\,;b) = \sqrt[b]{a} = \mathrm{e}^{\frac{\ln a}{b}}$

$\mathrm{e}^{\frac{\ln a}{b}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\ln b}{b}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{3}} = \sqrt[3]{3}$

$\boxed{36}$ 2°) $g : x \mapsto \mathrm{E}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

- Si $x \in]-\infty\,;0[$, alors $g(x) = -1$.
- Si $x \in [0\,;1[\bigcup]1\,;+\infty[$, alors $g(x) = 0$.
- Si $x = 1$, alors $g(x) = 1$.

$\boxed{43}$

Il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité du réordonnement.

$\boxed{48}$

On peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c$.

1.
$a - b \geqslant |\,c\,|$
$b - c \geqslant |\,a\,|$
$a - c \geqslant |\,b\,|$
$a = b + c$
$a \geqslant b + |\,c\,| \geqslant b + c$
$b \geqslant a + c$
$c \leqslant b + a$
$a - c \geqslant -b$

2.
$b - c \geqslant |\,a\,|$
$b - a \geqslant c$
Or $a \geqslant b$ donc $b - a \leqslant 0$ donc $c \leqslant 0$.
De plus $b \geqslant a + c$.
Requis : $a - b \geqslant |\,c\,| \Rightarrow a - b \geqslant -c \Rightarrow a + c \geqslant b$

$\boxed{49}$
Le 22 décembre 2020

Cet exercice m'a inspiré le suivant :

$$A=\sum_{i=1}^{i=n} a_i \text{ et } B=\sum_{i=1}^{i=n} b_i \,.$$

$$AB=\left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i\right)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_i b_j + a_j b_i\right)$$

On peut ainsi écrire le développement d'un carré d'une somme.

$\boxed{53}$ Version trouvée sur le forum mathematiques.net.
J'ai une solution de cet exercice par Monsieur Soladié.

On a $S_n=\dfrac{q+2N}{2^p q}$ donc S_n n'est pas un entier puisque le numérateur est un entier naturel impair et que le dénominateur est un entier pair.

Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Kürschák.

D'après le théorème de Kürschák, la seule somme d'inverses d'entiers naturels consécutifs qui soit entière est H_1.
Le postulat de Bertrand permet de démontrer que les deux seuls autres nombres harmoniques décimaux sont $\mathrm{H}_2=1,5$ et $\mathrm{H}_6=2,45$.
Julian Havil (de), Gamma : Exploring Euler's Constant, Princeton University Press, 2009 (1re éd. 2003), 304 p. (ISBN 978-0-691-14133-6, lire en ligne [archive]), p. 24-25.

Les seuls nombres harmoniques décimaux sont $\mathrm{H}_1=1$, $\mathrm{H}_2=1,5$ et $\mathrm{H}_6=2,45$.

http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,418260,418260#msg-418260

http://www.prise2tete.fr/forum/viewtopic.php?id=10823#p152365
il faut savoir que pour trouver le ppcm de plusieurs nombres, il suffit de garder le max des puissances dans les décompositions en produits de facteurs premiers de ces nombres :

$\boxed{56}$ Pour la conjecture, on peut utiliser la calculatrice.
Il peut être intéressant de voir ce qui se passe pour $x\in\mathbb{R}$.
C'est quasiment tout le temps 0 sauf pour quelques valeurs où on obtient – 1.

Énoncé de M. Kaddouri septembre 2023 par Ivan Speranski

Soit n un entier naturel quelconque.
1°) Démontrer que $\sqrt{4n+1}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2}$.
2°) On pose $d=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+1}\right)$. Démontrer que l'inégalité $\sqrt{4n+2}\geqslant d+1$ est impossible.
3°) En déduire que $\mathrm{E}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)=d$.

2°) $\sqrt{4n+2}\geqslant d+1$ entraîne $d\leqslant\sqrt{4n+1}<d+1\leqslant\sqrt{4n+2}$

$\sqrt{4n+2}-\sqrt{4n+1}=\dfrac{1}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{4n+1}}<\dfrac{1}{2n+2n}=\dfrac{1}{4n}<1$
Il n'est donc pas possible de trouver un entier naturel entre ces deux nombres.

Le 22-11-2023

Si on suppose que $\sqrt{4n+2}\geqslant d+1$, on peut écrire $4n+2\geqslant(d+1)^2$.

D'autre part, $0<d\leqslant\sqrt{4n+1}<d+1$, qui entraîne $d^2\leqslant 4n+1<(d+1)^2\leqslant 4n+2$.
Or $4n+1$ et $4n+2$ sont consécutifs donc $(d+1)^2=4n+2$.
Cette dernière inégalité permet d'affirmer que $(d+1)^2$ est pair.
Par conséquent, $(d+1)^2$ est de la forme $4m$ où m est un entier naturel non nul. On aboutit à une impossibilité dans l'égalité $(d+1)^2=4n+2$.

$\boxed{56}$ Comparer $\mathrm{E}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)$ et $\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+2}\right)$ pour $n\in\mathbb{N}$.
Le 9 mars 2022
Alain Troesh Exercices sur les réels

Démontrer que pour tout entier naturel n on a $\mathrm{E}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+1}\right)=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+2}\right)=\mathrm{E}\left(\sqrt{4n+3}\right)$.

$\boxed{57}$

Le 24-8-2021

On raisonne par l'absurde.
Si $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est un nombre rationnel, alors $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ est aussi rationnel.

On en déduit que $\sqrt{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)+\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{2}$ est aussi un nombre rationnel.

$\boxed{59}$ Rémy Nicolaï propose dans sa feuille d'exercices sur les nombres réels un exercice intéressant avec des intersections.
$[a,b]\cap\mathbb{Z}=[\![\lceil a\rceil;\lfloor b\rfloor]\!]$ d'où $\mathrm{card}\left([a,b]\cap\mathbb{Z}\right)=\lfloor b\rfloor-\lceil a\rceil+1$
On utilise la partie entière par défaut et par excès (voir article Wikipedia sur ce sujet).
On sait ensuite que $\lceil a\rceil=-\lfloor -a\rfloor$.
On en déduit que $\mathrm{card}\left([a,b]\cap\mathbb{Z}\right)=\mathrm{E}(b)+\mathrm{E}(1-a)$.

Définition :
Soit x un nombre réel.
Soit n l'entier relatif tel que $n-1<x\leqslant n$. n est appelé partie entière par excès ou partie entière supérieure de x (en anglais ceiling(x)).
n est donc le plus petit entier supérieur ou égal à x.
La partie entière de x est souvent notée $\lceil x\rceil$.

60
1°) b)
1er cas : l'un des réels est strictement supérieur à 1
Dans ce cas, le résultat est évident.
2e cas : tous les réels sont inférieurs à 1
Ils sont tous dans l'intervalle $\left[0\,;1\right]$. On utilise le a).

66 On applique l'inégalité entre moyenne arithmétique et moyenne géométrique.

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} \geqslant \sqrt[n]{z_1 z_2 \ldots z_n}$$

67 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}+\sum_{i=1}^{n}y_i^{\,2}-2\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$

Il s'agit d'un cas particulier de l'inégalité du réordonnement.

68
On raisonne par l'absurde.

$\left|\,f(0)+g(0)\right|<\frac{1}{4}$

$\left|\,f(1)+g(0)\right|<\frac{1}{4}$

$\left|\,f(0)+g(1)\right|<\frac{1}{4}$

$\left|\,f(1)+g(1)\right|<\frac{3}{4}$

$\left|\,f(1)+g(1)-1\right|<\frac{1}{4}$

72
3°) Il faut distinguer les cas $n=0$ et $n\geqslant 1$.
On raisonne ensuite par l'absurde en élevant au carré les deux nombres.

76 $\mathrm{A}=\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$

Autre méthode : $\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\ldots$

77

Solution :

$\mathrm{E}(-x)+\mathrm{E}(x)=1_{\mathbb{Z}}(x)-1$
On pose $p=\mathrm{E}(x)$.
On a $x=p+r$ avec $0\leqslant r<1$.
$-x=-p-r$
$\mathrm{E}(-x)=-p+\mathrm{E}(-r)$

79

On a $\sqrt{64n^2+1}<8n+1$ (démonstration aisée).

On obtient ensuite aisément $\sqrt{16n^2+\sqrt{64n^2+1}}<\sqrt{16n^2+8n+1}=4n+1$ puis $x<n+1$.
On a $x>n$ de manière évidente.
On obtient $\mathrm{E}(x)=n$.

80 $f_a : x\mapsto \mathrm{E}(ax)-a\mathrm{E}(x)$
1°) $t-1<\mathrm{E}(t)\leqslant t$
$ax-1<\mathrm{E}(ax)\leqslant ax$
$x-1<\mathrm{E}(x)\leqslant x$
$ax-a<a\mathrm{E}(x)\leqslant ax$
$-ax\leqslant -a\mathrm{E}(x)<a-ax$
$-1<\mathrm{E}(ax)-a\mathrm{E}(x)<a$
$-1<f_a(x)<a$

84 1°) a) Démontrer que, pour tous réels strictement positifs x et y, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$.
b) Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?
2°) Soit a,
Le 28-10-2023

Lionel Ponton TB1 lundi 16 octobre 2023
Devoir surveillé n°2
Durée : 1 h 45

1°) a) Démontrer que, pour tous réels strictement positifs x et y, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$.
b) Dans quels cas l'inégalité précédente est-elle une égalité ?
2°) Soit a, b et c des réels strictement positifs. En appliquant l'inégalité précédente successivement avec $x=a+b$ et $y=a+c$ puis $x=b+c$ et $y=a+b$ et enfin $x=b+c$ et $y=a+c$, démontrer que $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.