# Exercices sur les suites

**1** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + \cos n$.
Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ par étude de fonction.
On commencera par définir une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_n = f(n)$ puis on étudiera le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$ sans faire le tableau de variation.

**2** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = (u_n)^2 - u_n + 1$.
Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ par différence.

**3** Soit $(u_n)$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ à termes positifs ou nuls.
Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{(1+u_n)(1+u_{n+1})}$.
Démontrer que si $(u_n)$ est croissante si et seulement si $(v_n)$ est croissante.

**4** Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = 1 + \dfrac{2}{7} + \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$.
Donner une expression simplifiée de $S_n$ sous forme factorisée ; en déduire que la suite $(S_n)$ est majorée.

**5** Soit $(u_n)$ une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_3 = 2$ et $u_7 = 14$.
1°) Calculer son premier terme $u_0$ et sa raison *r*.
2°) Exprimer $u_n$ en fonction de *n*.
3°) Calculer la somme $S = u_4 + u_5 + \ldots + u_{25}$.

**6** Soit $(u_n)$ une suite géométrique monotone définie sur $\mathbb{N}$ telle que $u_4 = 1$ et $u_6 = 9$.
1°) Calculer son premier $u_0$ et sa raison *q*.
2°) Exprimer $u_n$ en fonction de *n*.
3°) Calculer la somme $S = u_4 + u_5 + \ldots + u_{14}$.

**7** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 6$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{1}{3}$.
1°) Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, tracer les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$.
Placer alors les points d'abscisses respectives $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$. On laissera apparentes les constructions.
2°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = u_n - 1$.
Démontrer que la suite $(v_n)$ est géométrique ; exprimer alors $v_n$ puis $u_n$ en fonction de *n*.

**10** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1}$.
1°) Démontrer que pour tout entier naturel *n* on a $u_n > 0$.
2°) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$ par différence.
3°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est suite arithmétique.
b) Exprimer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de *n*.

**11** Pour tout entier naturel *n*, on considère l'équation $\dfrac{x^3}{x^2+1} = n \quad (E_n)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
1°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, l'équation $(E_n)$ admet une unique solution, notée $x_n$, dans $\mathbb{R}$.
2°) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)$.
3°) Démontrer que pour tout entier naturel *n* on a : $n \leqslant x_n \leqslant n+1$.
En déduire la limite de la suite $(x_n)$ et de la suite $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$.

**12**

**A** Démontrer que la suite $(v_n)$ définie par son terme général $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}$ est majorée.

**B** On donne une suite croissante $(q_n)$ d'entiers naturels telle que $q_0 \geqslant 2$.
On construit la suite $(u_n)$ par $u_0 = \dfrac{1}{q_0}$, $u_1 = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1}$, … , $u_n = \dfrac{1}{q_0} + \dfrac{1}{q_0 q_1} + \ldots + \dfrac{1}{q_0 q_1 \ldots q_n}$.
1°) Démontrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante.
2°) Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, on a $u_n \leqslant v_n$.
3°) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)$ converge et que sa limite appartient à l'intervalle ]0 ; 1].

**13** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + n(u_n)^2}$.

1°) Quel est le signe des termes de la suite ?
2°) Démontrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
3°) Étudier le cas particulier où $u_1 = 1$.
4°) Dans le cas général, démontrer que pour tout entier naturel *k* non nul on a : $\dfrac{1}{u_{k+1}^2} - \dfrac{1}{u_k^2} \geqslant 2k$ ; en déduire que pour tout entier naturel *n* non nul on a : $\dfrac{1}{u_n^2} \geqslant n(n-1) + \dfrac{1}{u_1^2}$.
Démontrer que la suite $(nu_n)$ est bornée.
5°) a) Soit M un majorant de $(nu_n)$.

Démontrer que, pour tout entier naturel $k$, on a : $2k \leqslant \dfrac{1}{u_{k+1}^{\,2}} - \dfrac{1}{u_k^{\,2}} \leqslant 2k + \mathrm{M}^2$.

b) En déduire un équivalent simple de $u_n$.

**14** On considère la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par ses premiers termes $0 < u_0 < u_1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_{n-1}^2}{u_n + u_{n-1}}$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

1°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n > 0$.

2°) Pour tout entier naturel $n$, on pose $d_n = u_{n+1} - u_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $d_n = -\dfrac{u_{n-1}}{u_n + u_{n-1}} d_{n-1}$ et déterminer le signe de $d_n$ suivant les valeurs de $n$.

3°) a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $u_{n+1} - u_{n-1} = \dfrac{u_n}{u_n + u_{n-1}} d_{n-1}$.

b) Démontrer que la suite $(u_{2n})$ est croissante et $(u_{2n+1})$ est décroissante.

4°) Démontrer que la suite $(u_n)$ converge (on ne demande pas de déterminer la limite).

**15** On considère la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier naturel $n$.

1°) Démontrer que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left( \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \right)$. En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers + ∞.

On rappelle le résultat suivant sur les **moyennes de Césaro**.

> Soit $(a_n)$ une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.
>
> Si $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ $((l \in \mathbb{R})$, alors $\dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

**16** On considère la suite réelle $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^{\,2} \times \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

1°) Que peut-on dire de la suite $(u_n)$ si $u_0 > 1$ ?

2°) Déterminer pour quelles valeurs de $u_0$ la suite $(u_n)$ est constante.

3°) On se place dans le cas où $u_0 \in \left]0\,;1\right[$.

On définit la fonction $f : x \mapsto x^2 \times \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Démontrer que, si $x \in \left]0\,;1\right[$, alors $0 < f(x) \leqslant x < 1$.

b) En déduire que $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ et démontrer qu'elle converge vers un réel $l \in \left[0\,;1\right[$.

**17** Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$.

1°) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$.

2°) Exprimer la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$ en fonction de $n$.

**18** On considère la suite réelle $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n + u_n^{\,2}}$.

1°) Étudier la suite $(u_n)$ (sens de variation et convergence).

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left( \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \right)$. En déduire un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers + ∞.

On rappelle le résultat suivant sur les **moyennes de Césaro**.

> Soit $(a_n)$ une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.
>
> Si $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ $((l \in \mathbb{R})$, alors $\dfrac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

**19** Soit $a$ un réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + (n+1) u_n^{\,2}}$.

1°) a) Démontrer que la relation précédente définit bien une suite numérique.

b) Expliciter la suite $(u_n)$ lorsque $a = 1$.

2°) Démontrer que, dans le cas général, la suite $(u_n)$ est décroissante et minorée.

Déterminer la limite de la suite $(u_n)$ (on raisonnera par l'absurde).

3°) a) Dresser le tableau de variations de la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + (n+1)x^2}$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

c) Démontrer que, pour tout entier naturel $k$, on a : $\dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = (k+1) u_k$.

En déduire que, pour $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{n - 1 + \dfrac{1}{u_1}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Donner un équivalent simple de $u_n$ lorsque $n$ tend vers + ∞.

**20** Soit $a$ un réel strictement positif fixé.

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on considère la fonction polynôme $P_n$ définie par $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k - a$.

1°) Démontrer que le polynôme $P_n$ admet une unique racine positive ou nulle que l'on notera $x_n$.

Démontrer que l'on a : $x_n \leqslant a$.

2°) Calculer $x_1$ et $x_2$ en fonction de $a$.

3°) Étudier le signe de $P_{n+1}(x)$.

En déduire le sens de variation de la suite $(x_n)$.

4°) Démontrer que la suite $(x_n)$ converge. On note $l$ sa limite.

Démontrer que l'on a : $0 \leqslant l < 1$.

5°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $x_n$ est solution de l'équation $x^{n+1} - (a+1)x + a = 0$.

Chercher $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n)^{n+1}$ ; en déduire la valeur de $l$.

**21** Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée telle que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $2u_n \leqslant u_{n-1} + u_{n+1}$.

Le but de cet exercice est de démontrer que cette suite est convergente.

On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1°) Démontrer que la suite $(v_n)$ est croissante et majorée.

En déduire qu'elle converge.

2°) Le but de cette question est de démontrer que sa limite $l$ est négative ou nulle.

On raisonne par l'absurde en supposant que $l > 0$.

a) Démontrer qu'il existe un entier naturel $N$ tel que si $n \geqslant N$, alors $v_n \geqslant \dfrac{l}{2}$.

b) Démontrer que si $n \geqslant N$, alors $u_n - u_N \geqslant (n-N)\dfrac{l}{2}$.

c) Conclure.

3°) Démontrer que $(u_n)$ converge.

**22** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \sqrt[n]{3 + \sin n}$.

Justifier que cette suite est définie sur $\mathbb{N}$ et déterminer sa limite.

**23**

**Partie A**

1°) Démontrer que, pour tout réel $x \in ]-1 ; +\infty[$, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

2°) En donnant à $x$ des valeurs particulières, démontrer que, pour tout entier naturel $k$ non nul, on a :

$\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ et $\ln(k+1) - \ln k \geqslant \dfrac{1}{k+1}$.

**Partie B**

On considère les suites $(S_n)$ et $(S'_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{n+k}$ et $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{k+n}$.

1°) Calculer $S_1$ $S_2$ $S_3$, $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$ (faire attention à ce qui « bouge » et à ce qui est fixe).

2°) Calculer $S_{n+1} - S_n$ pour $n$ entier naturel quelconque non nul. En déduire le sens de variation de $(S_n)$.

3°) Étudier le sens de variation de $(S'_n)$.

4°) Démontrer que $(S_n)$ et $(S'_n)$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

**Partie C**

1°) En écrivant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \geqslant \dfrac{1}{k+1}$ pour $k \in \{n, n+1, ..., 2n-1\}$, trouver une inégalité sur $S_n$.

2°) En écrivant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$ pour $k \in \{n+1, ..., 2n\}$, trouver une inégalité sur $S_n$.

3°) Écrire un encadrement de $S_n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

**24** Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n} + e^{-u_n}\right)$.

1°) Étudier le sens de variation de $(u_n)$ et déterminer sa limite.

2°) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(e^{2u_{n+1}} - e^{2u_n}\right)$ ; en déduire un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

On rappelle le résultat suivant sur les **moyennes de Césaro**.

Soit $(a_n)$ une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.

Si $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ $((l \in \mathbb{R})$, alors $\dfrac{a_0 + a_1 + ... + a_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

**25** On considère l'équation $x + \ln x = n$ $(\mathrm{E}_n)$ où $n$ est un entier naturel.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ l'équation $(\mathrm{E}_n)$ possède une unique solution notée $u_n$ dans $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

3°) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

4°) Déterminer un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**26** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ et on considère la suite $(u_n)$ définie par sur $\mathbb{N}^*$ par

$u_n = \sum\limits_{p=1}^{p=n} f\left(\dfrac{p}{n^2}\right)$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $1 - \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant 1$.

On rappelle l'équivalence :

$\mathrm{A} \leqslant \sqrt{\mathrm{B}}$ si et seulement si $\begin{cases} \mathrm{A} \leqslant 0 \\ \mathrm{B} \geqslant 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \mathrm{A} \geqslant 0 \\ \mathrm{A}^2 \leqslant \mathrm{B} \end{cases}$.

2°) Déterminer un encadrement de $u_n$.

3°) Étudier la convergence de $(u_n)$.

**27** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = \tan n$.

1°) Démontrer que la suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$.

2°) Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$.

3°) Démontrer que $(u_n)$ est divergente (**indication :** raisonner par l'absurde).

**28** Soit $(u_n)$ une suite réelle à termes positifs et $\sigma$ une bijection de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Pour tout entier naturel, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$.

1°) Étudier la monotonie de $(S_n)$ et $(S'_n)$.

2°) Démontrer que si $(S_n)$ converge, alors $(S'_n)$ converge aussi vers la même limite.

**29** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles $u_n^2+v_n^2+u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Démontrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent et déterminer leurs limites.

**30** Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[0\,;2\pi]$ par $f(x)=x+\sin x$.
1°) Étudier le sens de variation de $f$ sur I et étudier le signe de $f(x)-x$.
2°) Étudier les propriétés de la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0\in\mathrm{I}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$ suivant les valeurs de $u_0$.

**31** 1°) On considère la fonction $f: x\mapsto \sin 2x$.
Tracer la représentation graphique de $f$.
a) Démontrer que pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ on a : $f(x)\geqslant\frac{4}{\pi}x$.
b) Démontrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans l'intervalle ]0 ; 1].
c) Déterminer le meilleur encadrement de $f'(x)$ pour $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.
2°) Soit $(u_n)$ la suite définie par son premier terme $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$.
a) Démontrer que l'on peut restreindre l'étude au cas où $u_0\in[0\,;1]$.
b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)$ lorsque $u_0=0$ ?
c) On suppose que $u_0\in\,]0\,;1]$.
• Démontrer que tous les termes sont compris dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}\,;1\right]$ à partir d'un certain rang.
**Indication :** raisonner par l'absurde et utiliser le 1°) a).
• Étudier la convergence de $(u_n)$.

**32** Pour tout entier naturel $n\geqslant 3$, on pose $P_n=\prod_{k=3}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$.
Étudier les propriétés de la suite $(P_n)$.

**33** On considère la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0\in\,]0\,;1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}u_k$.
1°) Déterminer la limite de $(u_n)$.
2°) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n\leqslant 2^n$.

**34** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-2\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}$.
1°) Démontrer que I est stable par $f$.
2°) Étudier le signe de $f(x)-x$ pour $x\in\mathrm{I}$.
3°) Étudier les propriétés de la suite $(u_n)$ définie par son premier terme $u_0\in\mathrm{I}$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel $n$ suivant les valeurs de $u_0$.

**35** On considère la fonction $f: x\mapsto x\ln x$.
1°) Démontrer que $f$ réalise une bijection de l'intervalle $\mathrm{I}=[1\,;+\infty[$ dans un intervalle J à préciser.
2°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, l'équation $f(x)=n$ admet une unique solution dans I.
On note $u_n$ cette solution.
3°) Déterminer le sens de variation de $(u_n)$ et sa limite.
4°) Justifier que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $\ln u_n+\ln(\ln u_n)=\ln n$.
En déduire un équivalent de $\ln u_n$ puis un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**36** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que pour tout entier $k\geqslant 2$ la suite extraite $(u_{kn})$ converge.
La suite $(u_n)$ converge-t-elle ?
On pourra considérer la suite $(u_n)$ définie par $u_n=1$ si $n$ est premier, $u_n=0$ sinon.

**37** Soit $(u_n)$ une suite réelle. On considère deux applications strictement croissantes $\varphi_1$ et $\varphi_2$ de $\mathbb{N}$ dans lui-même telles que $\varphi_1(\mathbb{N})\cup\varphi_2(\mathbb{N})=\mathbb{N}$.
Le but de l'exercice est de démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{\varphi_1(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_{\varphi_2(n)}=\lambda\ (\lambda\in\overline{\mathbb{R}})$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lambda$.
1°) On se place dans le cas où $\lambda\in\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif.
Il existe deux entiers naturels $N_1$ et $N_2$ tels que :
$n\geqslant N_1\Rightarrow\left|u_{\varphi_1(n)}-\lambda\right|\leqslant\varepsilon$ et $n\geqslant N_2\Rightarrow\left|u_{\varphi_2(n)}-\lambda\right|\leqslant\varepsilon$.
On pose $N=\max\left(\varphi_1(N_1)\,;\varphi_2(N_2)\right)$.
Démontrer que, si $n\geqslant N$, alors $|u_n-\lambda|\leqslant\varepsilon$.
Conclure.
2°) Traiter de même les autres cas.

**38** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$.
Étudier le comportement à l'infini de $u_n$.

**39** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k!$.
Étudier la convergence de $(u_n)$.
**Indications :**
1°) Déterminer un minorant de $(u_n)$.
2°) Majorer <u>simplement</u> $\sum_{k=0}^{n}k!$.

**40** 1°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, il existe un unique réel $x_n$ tel que $x_n=\cos\frac{x_n}{n}$.
2°) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $x_n\in\,]0\,;1[$.
3°) Déterminer le sens de variation de $(x_n)$.
4°) Déterminer la limite de $(x_n)$.

**41** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.

1°) Déterminer le sens de variation de $(u_n)$.

2°) Démontrer que $(u_n)$ est majorée.

Que peut-on en déduire ?

**42** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4+k}}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ (encadrer en utilisant un principe grossier).

**43** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ et la relation de récurrence

$u_{n+1} = \frac{u_n+1}{\sqrt{u_n^{\ 2}+1}} - 1$.

1°) Déterminer pour quelles valeurs de $u_0$ la suite $(u_n)$ est constante.

2°) On prend $u_0$ dans l'intervalle $]-1\,;0[$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $-1 < u_n < 0$.

Étudier le sens de variation de $(u_n)$.

b) En déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

**44** Soit $\alpha$ un réel n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$.

On se propose de démontrer que les suites $(\cos n\alpha)$ et $(\sin n\alpha)$ divergent.

1°) Démontrer que si $\cos n\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$, alors $\sin n\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} l'$ (considérer $\cos\left[(n+1)\alpha\right]$) ; exprimer $l'$ en fonction de $l$.

2°) Étudier la réciproque.

3°) Trouver une contradiction.

**45** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}) = \lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n+1}) = \lambda$ $\left(\lambda \in \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lambda$.

**46** Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que $(u_{3n})$, $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$ convergent.

Le but de l'exercice est de démontrer que $(u_n)$ converge.

1°) On note $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ les limites respectives des suites $(u_{3n})$, $(u_{2n})$, $(u_{2n+1})$.

- Démontrer $\lambda_1 = \lambda_2$.
- Démontrer $\lambda_1 = \lambda_3$.

2°) Conclure.

**47** Soit $(u_n)$ une suite réelle. Soit $(v_n)$ une suite extraite de $(u_n)$ et $(w_n)$ une suite extraite de $(v_n)$.

Démontrer $(w_n)$ une suite extraite de $(u_n)$.

**48** Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites numériques $(u_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ telles que, pour tout entier naturel $n$, on ait :

$u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + n$ (1).

1°) Déterminer une suite arithmétique appartenant à $\mathcal{E}$.

2°) En s'inspirant de la méthode de la variation de la constante pour les équations différentielles du premier ordre avec second membre et en utilisant le 1°), déterminer les éléments de $\mathcal{E}$.

**49** On considère une suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $]0\,;1[$ telle que, pour tout entier naturel $n$, on ait :

$u_{n+2} \leqslant u_n\, u_{n+1}$.

Étudier les propriétés de la suite $(u_n)$.

**50** On considère la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par ses premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$ où $a$ et $b$ sont deux réels positifs ou nuls ainsi que la relation de récurrence $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$ pour tout entier naturel $n$.

On pose $m = \min(1\,;\min(a\,;b))$.

1°) Démontrer que la suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ et est minorée par $m$.

2°) Démontrer que si $(u_n)$ converge alors elle converge alors elle converge vers 0 ou 4.

Soit $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = |u_n - 4|$.

3°) a) Démontrer que la suite $(\mathrm{M}_n)$ définie par $\mathrm{M}_n = \max(v_n\,;v_{n+1})$ est décroissante.

b) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $v_{n+2} \leqslant \frac{v_{n+1}+v_n}{2+\sqrt{m}}$.

c) En déduire la nature de la suite $(u_n)$ et sa limite éventuelle.

**51** Soit $a \in ]0\,;1[$. On considère la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0$ et $u_1$ ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)\min(1\,;u_n)$.

1°) Étant donné un entier naturel $n$, démontrer que $u_{n+1} \leqslant 1 \Rightarrow u_{n+2} \leqslant 1$.

2°) On suppose dans cette question que : $u_1 \leqslant 1$.

a) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $u_n - u_{n-1} = (a-1)^{n-2}(u_2 - u_1)$.

La suite $(u_n)$ est-elle monotone ?

b) En considérant $\sum_{k=2}^{n}(u_k - u_{k-1})$, en déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de $u_n$ en fonction de $n$, $a$, $u_1$ et $u_2$.

La suite $(u_n)$ est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

3°) On suppose dans cette question que : $u_1 > 1$ et $u_2 > 1$.

a) Établir que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $u_n > 1$.

b) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$ à partir de l'indice 2.

En déduire que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

4°) On suppose dans cette question que : $u_1 > 1$ et $u_2 \leqslant 1$.

Déduire du 2°) la nature de la suite $(u_n)$ et préciser sa limite éventuelle.

**52** Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

À tout point M($a$ ; $b$) de $\mathcal{P}$, on fait correspondre les points P et Q projetés orthogonaux de M respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Si M est distinct de O, on associe à M le point $\mathrm{M}'$, projeté orthogonal de O sur la droite (PQ). Dans le cas où $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, P et Q sont confondus avec O, on associe à M le point $\mathrm{M}'$ tel que $\mathrm{M}' = \mathrm{O}$.
Soit $\Phi$ l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ ainsi définie. On notera $\mathrm{M}' = \Phi(\mathrm{M})$.
1°) Déterminer les coordonnées de $\mathrm{M}'$ en fonction de celles de M.

2°) Démontrer que, pour tout point M de $\mathcal{P}$, on a : $\mathrm{OM}' \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{OM}$.

3°) Soit $(\mathrm{M}_n)$ la suite ainsi définie : $\mathrm{M}_0 \in \mathcal{P}$ et, pour tout entier naturel $n$, $\mathrm{M}_{n+1} = \Phi(\mathrm{M}_n)$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{M}_n$.

4°) Déterminer l'image par $\Phi$ :
- d'une droite passant par l'origine ;
- d'une droite parallèle à l'un des axes de coordonnées.

**53** **Densité de Schnirelmann**

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$. On dit que A admet une densité lorsque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\mathrm{card}\left(\mathrm{A} \cap \{1, 2, ..., n\}\right)$ existe et est finie ; dans ce cas, cette limite est appelée la densité de A et est notée $d(\mathrm{A})$.
On a : $0 \leqslant d(\mathrm{A}) \leqslant 1$.
1°) L'ensemble des carrés parfaits de $\mathbb{N}^*$ admet-il une densité ?

2°) Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^*$ admettant une densité. Démontrer que $\mathcal{D}$ est stable par passage au complémentaire et par réunion disjointe finie.
On dit que $\mathcal{D}$ est une **classe de Dynkin faible**.
3°) Soit $\mathcal{D}_0$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}^*$ de densité nulle.
a) Démontrer que $\mathcal{D}_0$ est stable par réunion finie.

b) Démontrer qu'étant données deux parties A et B de $\mathbb{N}^*$ telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, si $\mathrm{B} \in \mathcal{D}_0$, alors $\mathrm{A} \in \mathcal{D}_0$.

**54** 1°) Pour tout entier naturel non nul $N$, on note $\mathcal{F}_N$ l'ensemble des rationnels de l'intervalle [0 ; 1] qui peuvent s'écrire avec un dénominateur inférieur ou égal à $N$ ($\mathcal{F}_N$ est l'ensemble de Farey d'indice $N$).
Démontrer que $\mathcal{F}_N$ est un ensemble fini.
2°) On considère deux suites d'entiers naturels $(p_n)$ et $(q_n)$ telles que pour tout entier naturel $n$, on ait $p_n \leqslant q_n$ et $q_n > 0$.

On suppose que $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ converge vers un nombre irrationnel $l$.

a) On pose $\alpha_N = \min\limits_{r \in F_N} |r - l|$.

Démontrer que $\alpha_N > 0$.

b) Démontrer que, si l'on a : $\left|\frac{p_n}{q_n} - l\right| < \alpha_N$, alors $q_n > N$.

En déduire la limite des suites $(p_n)$ et $(q_n)$.

**55** Démontrer qu'une suite d'entiers relatifs $(u_n)$ converge si et seulement si elle est stationnaire.

**Indication :** pour démontrer le sens de gauche à droite, on pourra considérer la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

**56** Étudier la convergence des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$ et $v_n = \sqrt[n]{n!}$.

**57** Un triplet ($a$ ; $b$ ; $c$) d'entiers naturels est appelé **triplet de Pythagore** si $a^2 + b^2 = c^2$.

Soit $a$ un entier naturel impair ; on pose $b = \left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor$ et $c = \left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil$ respectivement la plus grande borne entière inférieure et la plus petite borne entière inférieure de $\frac{a^2}{2}$.

1°) Démontrer que $a^2 + b^2 = c^2$ (**indication :** poser $a = 2n + 1$ et exprimer $b$ et $c$ en fonction de $n$).

2°) Déterminer $\lim\limits_{a \to +\infty} \dfrac{\left\lfloor \frac{a^2}{2} \right\rfloor}{\left\lceil \frac{a^2}{2} \right\rceil}$ soit analytiquement, soit géométriquement en utilisant une figure.

**58** 1°) Soit $k$ un entier naturel non nul. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ ; en déduire que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$.

2°) Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

**59** On rappelle le résultat suivant sur les **moyennes de Césaro**.

> Soit $(a_n)$ une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$.
>
> Si $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ ($(l \in \mathbb{R})$, alors $\frac{a_0 + a_1 + ... + a_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

On considère une suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{2n})$ est converge vers un réel $a$ et la suite $(u_{2n+1})$ converge vers un réel $b$.

Démontrer que la suite $(S_n)$ définie par $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ converge et déterminer la limite.

**60** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles que $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n + v_n) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n v_n) = 0$.
Démontrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent et déterminer leurs limites.

**61** On considère la suite réelle $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par son premier terme $u_1$ et la relation de récurrence

$u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n}+1$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

1°) On suppose que $\boxed{u_1 \geqslant 0}$.

Étudier la monotonie de $(u_n)$ et déterminer sa limite.

2°) On suppose que $\boxed{u_1 < 0}$.

Démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a : $u_n \geqslant u_1+1$.

Démontrer qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $u_p \geqslant 0$.

En déduire la limite de $(u_n)$.

**62** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-\mathrm{E}(x)$.

Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites définie sur $\mathbb{N}$ telles que $f(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $f(y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

1°) Donner un exemple de suites non constantes $(x_n)$ et $(y_n)$ vérifiant les hypothèses.

2°) Démontrer que $f(x_n+y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $f(x_n-y_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

**63**

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}-1$.

1°) Étudier la fonction $f$.

En déduire $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{R}_+)$, $f([-1\,;0])$, $f(]-\infty\,;-1])$.

2°) Étudier le signe de la fonction $g$ définie par $g(x)=f(x)-x$.

### Partie B

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

1°) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)$ ?

2°) Pour quelle valeur de $u_0$ la suite $(u_n)$ est-elle constante ?

3°) On suppose désormais que la suite $(u_n)$ n'est pas constante.

Étudier la convergence de $(u_n)$ suivant les valeurs de $u_0$.

Lorsque $(u_n)$ converge, on explicitera sa limite.

**64**

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$.

Déterminer $f([0\,;+\infty[)$, $f([-1\,;0])$, $f(]-\infty\,;-1])$.

### Partie B

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

1°) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)$.

2°) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur $u_0$ la suite $(u_n)$ est-elle constante ?

3°) On suppose désormais que la suite $(u_n)$ n'est pas constante.

Déterminer la limite de $(u_n)$ suivant les valeurs de $u_0$.

### Partie C

Faire une étude similaire pour la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $v_0$ et la relation de récurrence $v_{n+1}=v_n-{v_n}^2$.

**65** Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\mathrm{C}_k^n}$.

1°) a) Démontrer que l'application $f:\begin{array}{l}[\![0\,;n]\!]\to\mathbb{R}\\ k\mapsto \mathrm{C}_n^k\end{array}$ est croissante sur $\left[\!\!\left[0\,;\mathrm{E}\left(\dfrac{n}{2}\right)\right]\!\!\right]$ et décroissante sur $\left[\!\!\left[\mathrm{E}\left(\dfrac{n}{2}\right);n\right]\!\!\right]$.

b) À l'aide d'un encadrement, déterminer la limite de $(u_n)$.

2°) Démontrer que $(u_n)$ est monotone à partir d'un certain rang (étudier $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$, $u_4$).

3°) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $u_{n+1}=1+\dfrac{n+2}{2(n+1)}u_n$.

Retrouver la limite de $(u_n)$.

**66**

### Partie A

Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=|\,x\ln x\,|$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

1°) Étudier les variations de la fonction $f$.

En déduire $f\left(\left]0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[\right)$, $f\left(\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right[\right)$, $f(]1\,;+\infty[)$.

2°) Étudier le signe de la fonction $g$ définie par $g(x)=f(x)-x$.

### Partie B

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ ($u_0$ étant un réel positif ou nul) et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.

1°) Démontrer que la suite $(u_n)$ est bien définie sur $\mathbb{N}$.

2°) Pour quelle valeur de $u_0$ la suite $(u_n)$ est-elle stationnaire ?

3°) On suppose désormais que la suite $(u_n)$ n'est pas constante.

Étudier le sens de variation et la convergence de $(u_n)$ suivant les valeurs de $u_0$.

**67** **Étude de deux suites imbriquées**

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$.

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $\begin{cases} u_0 = a \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$ et

$\begin{cases} v_0 = b \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$.

1°) Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont bien définies sur $\mathbb{N}$.

2°) Comparer $u_n$ et $v_n$.

3°) Déterminer le sens de variation des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

4°) Démontrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent puis qu'elles ont la même limite.

**68** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée du réel $u_0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \mathrm{e}^{1-u_n}$ pour tout entier naturel $n$.

On note $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ pour tout entier naturel $n$. On considère la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{1-x}$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.

Que peut-on en déduire pour les limites finies éventuelles de la suite $(u_n)$ ?

2°) Étudier la suite $(u_n)$ lorsque $u_0 = 1$.

3°) On supposera dans toute la suite de l'exercice que $u_0 \neq 1$.

a) Déterminer le signe de la fonction $f : x \mapsto 2 - x - \mathrm{e}^{1-x}$.

b) En déduire les variations de la fonction $h : x \mapsto g \circ g(x) - x$ puis le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de $x$.

4°) Faire le tableau de variations de la fonction $g \circ g$ ; en déduire que la fonction $g \circ g$ est bornée.

Démontrer que les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont bornées (on observera que pour tout entier naturel $n$, on a : $v_{n+1} = (g \circ g)(v_n)$ et $w_{n+1} = (g \circ g)(w_n)$).

5°) a) On suppose que l'on a : $u_0 > 1$.

Démontrer que la suite $(v_n)$ est décroissante ; en déduire le sens de variation de $(w_n)$.

b) On suppose que l'on a : $u_0 < 1$.

Démontrer que la suite $(v_n)$ est croissante ; en déduire le sens de variation de $(w_n)$.

6°) Déterminer les limites de $(v_n)$ et $(w_n)$ ; en déduire celle de $(u_n)$.

**69** **Question préliminaire :**

Rappeler sans démonstration la formule donnant $\tan(a+b)$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a$, $b$, $a+b$ ne soient pas de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $k$ entier relatif.

Pour tout entier naturel $n$, on pose $z_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{1+k(k+1)+\mathrm{i}}{1+k(k+1)-\mathrm{i}}$.

Pour tout entier naturel $k$, on note $\theta_k$ l'argument de $1+k(k+1)+\mathrm{i}$ tel que $0 < \theta_k < \dfrac{\pi}{2}$.

1°) Calculer $\tan(\theta_0 + \theta_1 + \ldots + \theta_n)$.

2°) Étudier la suite des modules et des arguments de $(z_n)$ ; en conclure la convergence de la suite $(z_n)$.

**70** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et la relation de récurrence

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \dfrac{1}{n+1}}$.

1°) Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ pour $u_0 = 0$ puis pour $u_0 = 1$.

Dans toute la suite, on considère :

- la suite $(a_n)$ définie par $a_{2p} = \dfrac{2p}{2p+1}$ et $a_{2p+1} = 1$ pour tout entier naturel $p$ ;
- la suite $(b_n)$ définie par $b_{2p} = 1$ et $b_{2p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+3}$ pour tout entier naturel $p$.

2°) On suppose que $0 < u_0 < 1$.

Démontrer que pour tout entier naturel $p$, on a : $a_{2p} < u_{2p} < b_{2p}$ et $b_{2p+1} < u_{2p+1} < a_{2p+1}$.

En déduire la convergence de la suite $(u_n)$.

3°) On suppose que $u_0 > 1$.

a) Regarder les premiers termes de la suite pour $u_0 = 2$.

b) On pose $d_n = u_{n+2} - u_n$.

Démontrer que pour tout entier naturel $n$, $d_n$ est du même signe que $1 - u_n$.

c) Démontrer que pour tout entier naturel $p$, on a : $b_{2p} < u_{2p}$ et $u_{2p+1} < b_{2p+1}$.

d) Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

- Démontrer que $(v_n)$ est minorée par 1 et que $(w_n)$ est majorée par 1.
- Étudier le sens de variation des suites $(v_n)$ et $(w_n)$.
- En déduire que $(v_n)$ et $(w_n)$ convergent.
- On note $\alpha$ et $\beta$ leurs limites respectives.

Démontrer que $\alpha\beta = 1$.

e) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, on a : $w_{n+1} - w_n \geqslant (1-\beta) \times \dfrac{1}{2n+5}$.

En déduire que pour tout entier naturel $n$, on a : $w_n - w_0 \geqslant (1-\beta) \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+5}$.

On admet que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+5} = +\infty$.

En déduire les valeurs de $\alpha$ et $\beta$.

**71** On considère deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ convergeant respectivement vers deux réels $l$ et $l'$ avec $l' \neq 0$.

Déterminer la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ du quotient $\dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{v_0 + v_1 + \ldots + v_n}$.

**72** 1°) Démontrer que, pour tout réel $x$ positif ou nul, on a : $x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x$.

2°) Étudier la convergence de la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ de terme général $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$.

**73** On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n$.

1°) Étudier la monotonie de $(u_n)$ et $(v_n)$.

2°) Comparer $u_n$ et $v_n$.

Conclure sur la convergence de $(u_n)$ et $(v_n)$.

**74** Étudier les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k\times k!}\right)$ et $v_n=\left(1+\frac{1}{n\times n!}\right)u_n$.

**75** 1°) Démontrer que, pour tout réel $x$ assez voisin de 0, on a : $-\frac{x^2}{2}-3x^4\leqslant \ln\cos x\leqslant -\frac{x^2}{2}$.

2°) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\sqrt{k}}{n}$.

**76** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ tel que $-1<u_0<0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=1+(-1)^n\sqrt{1+u_n}$.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

**77** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

**78** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles $u_n+v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et $e^{u_n}+e^{v_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$.

Démontrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent et déterminer leurs limites.

**79** Soit $x$ un réel. Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $u_n=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}kE(kx)$.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

**80** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\frac{1!+2!+...+n!}{n!}$.

1°) À l'aide du théorème d'encadrement, démontrer que la suite $(u_n)$ converge vers un réel que l'on précisera.

2°) Étudier la convergence des suites $(v_n)$ et $(w_n)$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n=\frac{1!+2!+...+n!}{(n-1)!}$ et $w_n=\frac{1!+2!+...+n!}{(n+1)!}$.

**81** Soit $(\lambda_n)$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont tous les termes appartiennent à l'intervalle $]0\,;1[$ et qui converge vers un réel $\ell$ de l'intervalle $[0\,;1[$.

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ vérifiant pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=\lambda_n u_n+(1-\lambda_n)v_n$ et $v_{n+1}=(1-\lambda_n)u_n+\lambda_n v_n$.

Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite.

On distinguera les cas $u_0\leqslant v_0$ et $v_0\geqslant u_0$.

**82** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^{(-1)^n}$.

Étudier la convergence de $(u_n)$.

**83** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\frac{-n+1}{n+2}$ si $n$ est pair et $u_n=\frac{-n+2}{n+1}$ si $n$ est impair.

Étudier la convergence de $(u_n)$.

**84** On considère les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_0=0$, $v_0=0$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=\sqrt{3-v_n}$ et $v_{n+1}=\sqrt{3+u_n}$.

1°) Démontrer que tous les termes des suites $(u_n)$ et $(v_n)$ appartiennent à l'intervalle [0 ; 3].

2°) On suppose que $(u_n)$ converge vers une limite $\ell$.

a) Démontrer que $\ell\leqslant\sqrt{3}$.

b) Démontrer que $\ell$ est racine du polynôme $P=X^4-6X^2-X+6$.

c) Sachant que – 2 est racine de $P$, déterminer toutes les racines de $P$.

d) Déterminer les limites possibles des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

3°) On pose, pour tout entier naturel $n$, $a_n=u_n-1$, $b_n=v_n-2$ et $\mu_n=\max(|a_n|,|b_n|)$.

a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a $|a_{n+1}|\leqslant|b_n|$ et $|b_{n+1}|\leqslant\frac{1}{2}|a_n|$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, $0\leqslant\mu_{n+2}\leqslant\frac{1}{2}\mu_n$.

c) Démontrer la convergence des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

d) Démontrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes et déterminer leurs limites.

**85** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0=0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=\frac{2}{u_n-1}$.

1°) Démontrer que la suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$.

2°) Déterminer le sens de variation de $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ; en déduire que $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

3°) Retrouver cette limite en considérant la suite $(v_n)$ définie par $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$.

**86** 1°) a) Démontrer que la loi définie sur $E = ]0\,;1[$ par $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ est une loi de composition interne.

b) Étudier les propriétés de cette loi.
c) Comparer $x * y$ avec $x$ et $y$.

2°) Soit $(a_n)$ une suite d'éléments de $E$. On considère la suite $(b_n)$ définie par son premier terme $b_0 = a_0$ et pour tout entier naturel $n$, $b_{n+1} = b_n * a_{n+1}$.

a) Démontrer que $(b_n)$ converge vers un réel $L \in ]0\,;1]$.

b) On suppose que $(a_n)$ converge vers un réel non nul. Déterminer $L$.

**87** Soit $(t_n)$ une suite de nombres réels. On note G l'ensemble des nombres réels $\alpha$ tels que la suite $\left(\sin(t_n\alpha)\right)$ converge vers 0.

1°) Démontrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

2°) Étude d'exemples

a) On suppose que $(t_n)$ est une suite convergente. Déterminer G.

b) On suppose que pour tout entier naturel $n$, $t_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n$. Démontrer que G contient $\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

On pourra commencer par démontrer que pour tout entier naturel $n$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier naturel pair.

c) On suppose que pour tout entier naturel $n$, $t_n = n$. Déterminer G.

d) On suppose que pour tout entier naturel $n$, $t_n = (n!)\times\pi$. Démontrer que G contient $\mathbb{Q}$ et que le nombre $\pi$e appartient à G (on pourra utiliser, après l'avoir justifiée, l'égalité $\mathrm{e} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-t)^n\,\mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t$ ).

**87** 1°) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective.

Démontrer que si $\dfrac{\varphi(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\ell \geqslant 1$.

2°) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective.

Démontrer que si $\dfrac{\varphi(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\ell \leqslant 1$.

3°) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective.

Démontrer que si $\dfrac{\varphi(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\ell = 1$.

**88** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0$ tel que $0 < u_0 < 2$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2 + (-1)^{n+1} u_n}$.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

**89** 1°) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{9+\sqrt{9+\sqrt{9+\ldots+\sqrt{9}}}}$ ($n$ radicaux).

2°) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $a_n$ la $n$-ième décimale de $\pi$.

La suite de terme général $\sqrt{a_0 + \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_n}}}$ admet-elle une limite ?

**90** Soit $(a_n)$ une suite arithmétique de raison $r$ dont tous les termes sont non nuls.

Pour tout entier naturel $n$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{a_0a_1} + \dfrac{1}{a_1a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_na_{n+1}}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

# Réponses

**16** Il est intéressant de programmer la suite sur calculatrice.
On ne cherche pas une expression explicite de $u_n$ en fonction de *n*.

2°) $u_0=\dfrac{1}{p}$ $\left(p\in\mathbb{N}^*\right)$ [on raisonne par condition nécessaire et suffisante : la condition nécessaire est

$\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_0}\right)=\dfrac{1}{u_0}$ donc $\dfrac{1}{u_0}\in\mathbb{N}$

3°) On se place dans le cas où $u_0\in\left]0\,;1\right[$.

On définit la fonction $f : x\mapsto x^2\times\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Démontrer que, si $x\in\left]0\,;1\right[$, alors $0<f(x)\leqslant x<1$.

b) $P(n)$ : « $u_n$ existe et $u_n\in\left]0\,;1\right[$

**17** 1°) $u_n=3^{(-1)^n}$

**20** 3°) On utilise le fait que comme $l\leqslant 0$ et que la suite $(v_n)$ est croissante, on en déduit que $l$ est un majorant (en fait, c'est le plus petit des majorants) donc tous les termes de la suite sont négatifs ou nuls.
On en déduit que la suite $(u_n)$ est décroissante.

**22** **Partie C** 3°) $\ln\dfrac{2n+1}{n+1}\leqslant S_n\leqslant\ln 2$.

**25** 4°) $u_n+\ln u_n=n$ ; $u_n+\ln u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}u_n$ ; $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n$

**26** 1°) $S_1=\left]-1\,;+\infty\right[$ ; $S_2=\left[0\,;+\infty\right[$

**28**

1°) $S'_n\leqslant S_N$ avec $N=\max\left(\sigma(0),\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\right)$

$S'_n\leqslant M$

2°) $L'\leqslant L$

On pose $v_k=u_{\sigma(k)}$ et $w_k=v_{\sigma^{-1}(k)}$. On obtient $L\leqslant L'$.

**30**

1°)

2°)

Si $u_0=0$, la suite $(u_n)$ est la suite constante nulle.
Si $u_0=\pi$, la suite $(u_n)$ est une suite constante.
Si $u_0=2\pi$, la suite $(u_n)$ est une suite constante.

Si $0<u_0<\pi$, alors la suite $(u_n)$ est strictement croissante et converge vers π.
Si $\pi<u_0<2\pi$, alors la suite $(u_n)$ est strictement décroissante et converge vers π.

**31** 1°) a) Faire la représentation graphique.
2°) c) On raisonne par l'absurde et on utilise le 1°) a) en supposant que tous les termes restent dans l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

$$u_1\geqslant\frac{4}{\pi}u_0$$
$$u_2\geqslant\frac{4}{\pi}u_1$$
$$\vdots$$
$$u_n\geqslant\frac{4}{\pi}u_{n-1}$$

---

$$u_n\geqslant\left(\frac{4}{\pi}\right)^n u_0$$

$$\frac{4}{\pi}>1$$

Il existe donc un entier naturel $k$ tel que $u_k\in\left[\dfrac{\pi}{4}\,;1\right]$.

Alors $u_{k+1}\in\left[\underbrace{f(1)}_{\approx 0{,}91}\,;\underbrace{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}_{1}\right]\subset\left[\dfrac{\pi}{4}\,;1\right]$ etc.

**38** $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

**40** 1°) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2(2n+3)}}+\dfrac{1}{\sqrt{2(2n+1)}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}\right)\geqslant 0$

2°) $(n+k)(n+k+1)\geqslant n^2$
$u_n\leqslant 1$

$f : x\mapsto x-\cos\dfrac{x}{n}$

$\cos\dfrac{x_n}{n+1}>\cos\dfrac{x_n}{n}=x_n$

$x_{n+1}>x_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$

**41** (nbre de termes)$\times$(+ petit) $\leqslant$ somme $\leqslant$ (nbre de termes)$\times$(+ gd).

**43** $\cos^2(n\alpha)+\sin^2(n\alpha)=1$

**47** 1°) $u_n = \dfrac{4n}{3} - \dfrac{16}{3}$

**49** $(u_n)$ est décroissante à partir du rang 2.

**51**

2°) c) $u_n = (u_2 - u_1)\dfrac{1-(a-1)^{n-2}}{2-a} + u_1$ 3°) $l = 1$

Version initiale d'une question : a) Établir que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a : $u_n \geqslant 1$.

**54** $(v_n)$ est une suite d'entiers relatifs qui converge vers 0.

Appliquer la définition avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$.

**58** $l = \dfrac{a+b}{2}$

**60** $u_n{}^2 + v_n{}^2 = (u_n + v_n)^2 - 2u_n v_n$

**62** 1°) On prend prendre les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ définies par $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ ; $y_n = n^2 + \dfrac{1}{n}$.

Plus simplement, on peut prendre $x_n = y_n = n$.

En fait, il suffit de prendre des suites $(x_n)$ et $(y_n)$ dont tous les termes sont des entiers relatifs.

2°) $x_n = \mathrm{E}(x_n) + \varepsilon_n$ ; $y_n = \mathrm{E}(y_n) + \varepsilon'_n$ ; $x_n + y_n = \mathrm{E}(x_n) + \mathrm{E}(y_n) + \varepsilon_n + \varepsilon'_n$.

Solution détaillée :

$$u_n = x_n - \mathrm{E}(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
$$v_n = y_n - \mathrm{E}(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$f(x_n + y_n) = u_n + v_n + \mathrm{E}(x_n) + \mathrm{E}(y_n) - \mathrm{E}\big(u_n + v_n + \mathrm{E}(x_n) + \mathrm{E}(y_n)\big)$$
$$f(x_n + y_n) = u_n + v_n - \mathrm{E}(u_n + v_n) \quad \text{car } \mathrm{E}(x_n) \text{ et } \mathrm{E}(y_n) \text{ sont des entiers}$$

On sait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + v_n \geqslant 0$.

Donc il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant \mathrm{N}$, alors $0 \leqslant u_n + v_n < 1$.

Donc $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, alors $f(x_n + y_n) = u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

**64**

### Partie A

$f([0\,;+\infty[) = [0\,;+\infty[$ ; $f([-1\,;0]) = \left[-\dfrac{1}{4}\,;0\right]$ ; $f(]-\infty\,;-1]) = [0\,;+\infty[$

On notera que les trois intervalles sont stables par *f*.

### Partie B

1°) La suite $(u_n)$ est constante.

2°) $u_0 = 0$

On notera que pour $u_0 = -1$, la suite $(u_n)$ est stationnaire à partir de l'indice 1. Elle est constante nulle à partir de l'indice 1.

3°)

- Si $u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)$ diverge $+\infty$.
- Si $-1 < u_0 < 0$, alors la suite $(u_n)$ converge vers 0.
- Si $u_0 < -1$, alors $u_1 > 0$ et la suite $(u_n)$ diverge $+\infty$.

Le cas $u_0 = -1$ apparaît naturellement si l'on fait le cas $u_0 = -1$.

### Partie C

$v_0 \in ]-\infty\,;0]$ ; $v_0 \in [0\,;1]$ ; $v_0 \in [1\,;+\infty[$ (on le voit par rapport à la courbe de $g : x \mapsto x - x^2$)

**66**

### Partie A

2°) $f\left(\left]0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[\right) = \left]0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, $f\left(\left]\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;1\right[\right) = \left]0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right[$, $f(]1\,;+\infty[) = ]0\,;+\infty[$

### Partie B

3°) $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < u_0 < 1$ alors $0 < u_1 < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ donc on est ramené au cas précédent.

Reste un problème quand $1 < u_0 < \mathrm{e}$.

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N} \; 1 < u_n < \mathrm{e}$. Dans ce cas, la suite $(u_n)$ serait décroissante.

De plus, elle serait minorée par 1 (et même par 0). Donc elle convergerait.

Or il n'y a aucune limite possible dans l'intervalle [1 ; e].

Donc l'hypothèse est absurde. Il existe un entier naturel $p$ tel que $u_p \leqslant 1$.

On est ramené au problème précédent : $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u_p \leqslant 1$.

Attention danger, quand l'image de $u_0$ vaut 1.

**67**

1°) $P(n)$ : « $u_n$ et $v_n$ existent ; $u_n \geqslant 0$ ; $v_n \geqslant 0$ ».
2°) Distinguer les cas $n=0$ et $n \geqslant 1$.
3°) 4°) $(u_n)$ minorée $\Rightarrow$ $(v_n)$ minorée

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l' \end{cases}$$

Incorporer dans les relations par passage à la limite.

**68**

$v_{n+1} = (g \circ g)(v_n)$
$w_{n+1} = (g \circ g)(w_n)$

$g \circ g$ est croissante.

Les suites $(v_n)$ et $(w_n)$ sont monotones.

$v_1 = (g \circ g)(v_0)$ avec $v_0 = u_0$

$u_0 > 1$

$(g \circ g)(u_0) - u_0 < 0$

$v_1 < v_0$

$(g \circ g)(\ell) - \ell < 0$

$\ell = 1$

**69** 3°) b) $d_n = u_{n+2} - u_n = \dfrac{(1-u_n)\left[(n+1)u_n + n + 2\right]}{(n+1)(n+2)+(n+1)u_n+1}$

e) $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} - w_n = \dfrac{(1-w_n)\left[(2n+2)w_n + 2n+3\right]}{(2n+2)(2n+3)+(2n+2)w_n+1} \geqslant (1-\beta)\times\dfrac{w_n+1}{2n+3+w_n+1} \geqslant (1-\beta)\times\dfrac{1}{2n+5}$

**76** Extraire deux suites : suite des termes d'indice paire, suite des termes d'indice impair.
On démontre que les termes de chacune de ces suites appartiennent à deux intervalles disjoints.

$\forall\, n \in \mathbb{N} \; -1 < u_{2n} < 0$ et $1 < u_{2n+1} < 2$.

Exemple : $u_1 = 1 + \sqrt{1+u_0}$
$0 < u_0 + 1 < 1$

$u_{n+2} = 1 + (-1)^{n+1}\sqrt{2+(-1)^n\sqrt{1+u_n}}$

La suite $(u_n)$ diverge.

Il est intéressant de représenter les termes sur la calculatrice.
On s'aperçoit que les suites extraites d'indice pair et d'indice impair sont dans des intervalles disjoints.

Il semble également que la suite des termes d'indice impair converge vers le nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et que la suite des termes d'indice impair converge vers $1-\varphi$.

**78** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2k}}$

$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2n}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}$

**81** Source énoncé : livre Eliott Gesteau

La suite $(u_n + v_n)$ est une suite constante.

1[er] cas : $u_0 \leqslant v_0$

On démontre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = \underbrace{(1-\lambda_n)}_{\geqslant 0}\underbrace{(v_n - u_n)}_{\geqslant 0}$

La suite $(u_n)$ est croissante.

La suite $(v_n)$ est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$

La suite $(u_n)$ est croissante majorée et la suite $(v_n)$ est décroissante minorée donc les suites convergent.

On note $a$ et $b$ leurs limites respectives.

On a : $a = \ell a + (1-\ell)b$. Or $\ell \in [0\,;1[$ donc $a = b$.

Si $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. énoncé à reprendre.

**87**

1°) $\ell < 1$

Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, alors card $E$ = card $f(E)$ ($E \subset \mathbb{N}$ fini).

Il existe un entier naturel $N$ tel que $n \geqslant N \quad \dfrac{\varphi(n)}{n} < \dfrac{\ell+1}{2}$.

On pose $\alpha = \frac{l+1}{2}$.

$\varphi\left(\{N, N+1, \ldots, n\}\right) \subset [0, n\alpha] \cap \mathbb{N}$

$n - N + 1 \leqslant n$

$n \to +\infty$

2°) Surjective même raisonnement.

Une barre de séparation :

$\varphi\left(\{N, N+1, \ldots, n\}\right) \subset [0, n\alpha] \cap \mathbb{N}$

$n - N + 1 \leqslant E(n\alpha) + 1$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{n-N+1}{n}} \leqslant \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\frac{E(n\alpha)+1}{n}}$$

# Questions de cours

$\boxed{1}$ TPLI (énoncé et démonstration). Raisonnement « à la Cauchy ».

$\boxed{2}$ Unicité de la limite d'une suite convergente.

$\boxed{3}$ Suites extraites (définition, propriétés).

$\boxed{4}$ Somme de deux suites convergentes.

$\boxed{5}$ Produit de deux suites convergentes.

$\boxed{6}$ Inverse d'une suite convergente.

$\boxed{7}$ Théorème des suites adjacentes.

$\boxed{8}$ Théorème des suites monotones.

$\boxed{9}$ Produit d'une suite bornée par une suite qui tend vers 0.

$\boxed{10}$ Si une suite converge vers une limite $l > 0$, alors tous les termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

$\boxed{11}$ Soit $(u_n)$ une suite. Démontrer que si $(u_n)$ converge vers un réel $l$, alors $(|u_n|)$ converge vers $|l|$.