TS3

Contrôle du mercredi 7 janvier 2009 (4 heures)

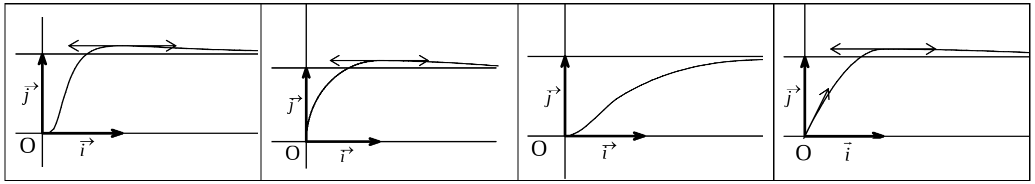
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

☐ L'en-tête de la copie doit être correctement libellé : nom, prénom, classe, date, intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un <u>cartouche</u> de présentation avec le numéro des exercices.
☐ Rendre l'énoncé dans la copie avec le nom indiqué clairement.
☐ Attacher un soin particulier à la présentation des calculs, des réponses, des résultats (en les encadrant en rouge) et à l'orthographe.

I. (6 points) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote.
2°) Etudier la continuité de f à droite en 0.
3°) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 (on étudiera $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$).
Que peut-on dire de la courbe $\mathcal{C}$ au point O ?
4°) Justifier avec soin la dérivabilité de f sur $]0\,;+\infty[$ et démontrer que pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$.
Dresser le tableau de variations de f avec les limites (flèches à la règle) et la valeur exacte de l'extremum.
5°) La courbe $\mathcal{C}$ est représentée sur l'un des quatre graphiques ci-dessous. Choisir lequel sans justifier en écrivant la lettre $\mathcal{C}$ à côté de la courbe correspondante.



6°) Calculer $f''(x)$ (calculs aux brouillons ; donner le résultat directement sur la copie) ; donner les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

II. (4 points) Compléter directement les cases de droite du tableau ci-dessous.
Aucune justification n'est demandée sur la copie. Une réponse fausse n'est pas pénalisée.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-\lvert x\rvert}+\dfrac{1-x}{1+x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Donner les équations des droites asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.	
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{x}$. Donner la limite en $+\infty$ de f.	
Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $\ln(x+1)+\ln(2x+1)<0$.	
Donner l'ensemble des solutions de l'inéquation $(\ln x)^2>1$.	
Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{\lvert x\rvert+1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Donner les équations des droites asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$.	
On considère la fonction f définie par $f(x)=\mathrm{e}^{-\cos x}$. Donner les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f'(x)=0$.	
On admet que pour tout réel x on a : $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x$. Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-x}$.	
Donner le maximum de la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ par $f(x)=x\sqrt{1-x}$.	

III. (3 points) Soit E un ensemble qui est la réunion de deux sous-ensembles disjoints E_1 et E_2 ayant respectivement *m* éléments et *n* éléments, *m* et *n* étant deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1°) a) Déterminer sans expliquer le nombre de parties à deux éléments de E tels que :
- les deux éléments appartiennent à E_1 ;
- les deux éléments appartiennent à E_2 ;
- un des éléments appartient à E_1 et l'autre appartient à E_2.

b) En déduire que l'on a : $\binom{m}{2} + mn + \binom{n}{2} = \binom{m+n}{2}$ (expliquer à l'aide d'une seule phrase).

2°) Retrouver cette formule par le calcul.

Pour les exercices IV, V, VI, compléter sans explication la colonne de droite des tableaux sur cette feuille.

IV. (1 point) Une urne contient trois boules jaunes, deux boules bleues et trois boules rouges.
On tire simultanément trois boules dans l'urne.

1°) Quel est le nombre de tirages comportant exactement deux boules de même couleur ?	
2°) Quel est le nombre de tirages comportant trois boules de même couleur ?	

V. (3 points) Un circuit possède 5 étapes A, B, C, D et E.

1°) Dénombrer les ordres de visites possibles.	
2°) Combien de circuits sont tels que D soit la troisième étape visitée ?	
3°) Combien de circuits sont tels que l'étape A soit visitée avant la D ?	

VI. (2 points) Une urne contient *n* boules blanches numérotées et *n* boules noires numérotées où *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On donnera les résultats sous forme factorisée.

1°) On tire successivement trois boules avec remise. Combien y a-t-il de résultats possibles tels que la deuxième boule tirée soit blanche ?	
2°) On tire successivement trois boules sans remise. Combien y a-t-il de résultats possibles tels que la deuxième boule tirée soit blanche ?	

VII. (2 points) Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle et A le point de coordonnées $(2\,;-1)$.

Corrigé du contrôle du 7-1-2009

III. Soit E un ensemble qui est la réunion de deux sous-ensembles disjoints E_1 et E_2 ayant respectivement m éléments et n éléments, m et n étant deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1°) a) Déterminer sans expliquer le nombre de parties à deux éléments de E tels que :

- les deux éléments appartiennent à E_1 : $\binom{m}{2}$

- les deux éléments appartiennent à E_2 : $\binom{n}{2}$

- un des éléments appartient à E_1 et l'autre appartient à E_2 : $\binom{m}{1}\times\binom{n}{1}=mn$.

b) En déduire que l'on a : $\binom{m}{2}+mn+\binom{n}{2}=\binom{m+n}{2}$ (expliquer à l'aide d'une seule phrase).

2°) Retrouver cette formule par le calcul.

IV.

Une urne contient trois boules jaunes, deux boules bleues et trois boules rouges.
On tire simultanément trois boules dans l'urne.

1°) Quel est le nombre de tirages comportant exactement deux boules de même couleur ?	
2°) Quel est le nombre de tirages comportant trois boules de même couleur ?	

1°) $\binom{3}{2}\times\binom{5}{1}\times 2+\binom{2}{2}\times\binom{6}{1}=36$

2°) $\binom{3}{3}+\binom{3}{3}=2$

V. Un circuit possède 5 étapes A, B, C, D et E.

1°) Dénombrer les ordres de visites possibles.	120
2°) Combien de circuits sont tels que D soit la troisième étape visitée ?	24
3°) Combien de circuits sont tels que l'étape A soit visitée avant la D ?	33

1°) $5!=120$

2°) $4!=120$

3^e^	1^er^	2^e^	4^e^	5^e^
1	4	3	2	1

3°) $4!+3!+2!+1!=33$

VI.

Une urne contient n boules blanches numérotées et n boules noires numérotées où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On donnera les résultats <u>sous forme factorisée</u>.

1°) On tire successivement trois boules avec remise. Combien y a-t-il de résultats possibles tels que la deuxième boule tirée soit blanche ?	$4n^3$
2°) On tire successivement trois boules sans remise. Combien y a-t-il de résultats possibles tels que la deuxième boule tirée soit blanche ?	$n(2n-1)(2n-2)$ ou $2n(2n-1)(n-1)$

On utilise la méthode des cases.

1°) avec remise

2^e	1er	3^e
n	$2n$	$3n$

$n \times 2n \times 2n = 4n^3$

2°) sans remise

2^e	1^{er}	3^e
n	$2n-1$	$2n-2$

$n(2n-1)(2n-2) = 2n(2n-1)(n-1)$