TS3

Interrogation écrite du lundi 26 janvier 2009 (20 minutes)

Prénom et nom : ………………………………. **Note : ……/20**

La calculatrice est autorisée. Répondre lisiblement et <u>sans ratures</u>. Ne pas utiliser d'abréviations.

I. (1 point) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

Calculer $f^{(3)}(x)$.

……

II. (2 points) Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x^2)$.

Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

……

III. (1 point) Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que u ne s'annule pas sur I.

Donner la dérivée de la fonction v définie sur I par $v(x) = \ln|u(x)|$.

…….

IV. (3 points) On dispose d'un sac contenant dix boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 10.
On extrait trois boules simultanément au hasard du sac.

Compléter directement la colonne de droite du tableau sans explication.
Pour les questions 2°) et 3°), on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

1°) Donner le nombre de tirages possibles.	
2°) Donner la probabilité p pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de cinq.	
3°) Donner la probabilité p' pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au plus une dont le numéro est un multiple de cinq.	

V. (3 points) On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 5$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{3}$ pour tout entier naturel *n*.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n > 1$. Compléter directement sur cette feuille.

Début :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $u_n > 1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

....

....

....

....

....

....

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie, c'est-à-dire ....

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Conclusion :
On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Corrigé de l'interrogation écrite du 26-1-2009

IV.

1°) Donner le nombre de tirages possibles.	$\binom{10}{3}=120$
2°) Donner la probabilité *p* pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de cinq.	$p=\dfrac{1}{15}$
3°) Donner la probabilité p' pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au plus une dont le numéro est un multiple de cinq.	$p'=\dfrac{14}{15}$

1°) Il s'agit d'un tirage simultané. On utilise donc les combinaisons.

2°) Les boules dont le numéro est multiple de 5 sont les boules dont le numéro est 5 ou 10.

$$p=\frac{\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{1}{15}$$

3°) Pour dénombrer les cas favorables pour l'événement dont on doit calculer la probabilité, on détermine le nombre de tirages ne comprenant aucune boule dont le numéro est un multiple de 5 (cas 1) et le nombre de tirages comprenant exactement une boule dont le numéro est un multiple de 5 (cas 2). On additionne les deux (car il s'agit de deux cas disjoints).
Pour le cas 2, on effectue un produit.

$$p'=\frac{\binom{8}{3}+\binom{2}{1}\times\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{14}{15}$$