TS

Exercices sur la fonction exponentielle (2)

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{3}$, on demande de déterminer les ensembles de définition de f et de dérivabilité de f puis de calculer la dérivée de f.

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$ $\boxed{2}$ $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$ $\boxed{3}$ $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}$

Dans les exercices $\boxed{4}$ à $\boxed{9}$, on demande de déterminer la limite de f en $+\infty$.
Dans le cas de transformations d'écriture, bien préciser pour quelles valeurs de x ces transformations d'écriture sont valables.

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{2x^2+3}$ $\boxed{5}$ $f : x \mapsto (2x-5)\mathrm{e}^{-4x}$ $\boxed{6}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$ $\boxed{7}$ $f : x \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^{x}-x}{x^2}$

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ $\boxed{9}$ $f : x \mapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{3x-4}$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$\boxed{11}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x}-x+3$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

1°) Étudier le sens de variation de f (on détaillera le signe de $f'(x)$) et les limites de f.
Calculer l'extremum de f (valeur exacte).
2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ.
3°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction Oy en $+\infty$.
4°) Faire un petit tableau de valeurs puis tracer $\mathcal{C}$ et Δ en prenant 1 cm pour unité graphique.

Tracer la tangente horizontale ainsi que la tangente T au point A d'abscisse 0 après avoir cherché son équation réduite.

Bien mettre les pointillés pour les coordonnées du point correspondant au minimum (en abscisse et en ordonnée **avec les valeurs exactes** sur les axes).

Vérifier sur la calculatrice graphique.

Corrigé

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{ 2 \}$; f est dérivable sur D_f en tant que composée de fonction dérivables.

$\forall x \in D_f \quad f'(x) = -\dfrac{7}{(x-2)^2}\mathrm{e}^{\frac{2x+3}{x-2}}$

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$

$f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{2x}-1}$

$D_f = \mathbb{R}^*$; $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1-2x\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^2}$

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^2+3}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} \times \dfrac{1}{2+\dfrac{3}{x^2}}$ pour tout réel $x \neq 0$; on ne peut pas appliquer la règle sur les monômes car f n'est pas une fonction rationnelle.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\boxed{5}$ $f : x \mapsto (2x-5)\mathrm{e}^{-4x}$

$D_f = \mathbb{R}$; $X = -4x$; $f(x) = -\dfrac{X\mathrm{e}^X}{2} - 5\mathrm{e}^X$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{\mathrm{e}^x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$; $f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}} \times \dfrac{1+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$ pour tout réel $x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{7}$ $f : x \mapsto \dfrac{2\mathrm{e}^x - x}{x^2}$

$D_f = \mathbb{R}^*$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Solution détaillée :

$D_f = \mathbb{R}^*$

Au numérateur, on rencontre une F.I. du type « $\infty - \infty$ ».

Pour tout réel $x \neq 0$, on a : $f(x) = 2\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{(théorème de croissance comparée)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$

$D_f = \mathbb{R}_+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (changement de variable $X = -\sqrt{x}$; on a donc : $X^2 = x$; $f(x) = X^6\mathrm{e}^X$)

Solution détaillée :

$f(x)$ existe si et seulement si $x \geq 0$.

$D_f = \mathbb{R}_+$

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

On pose $X = -\sqrt{x}$ donc $x = X^2$.

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to -\infty)$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = X^6\mathrm{e}^X$

$\lim\limits_{X \to -\infty} \left(X^6\mathrm{e}^X\right) = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{9}$ $f : x \mapsto \sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$

$D_f = \mathbb{R}_+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (pas de changement de variable ; faire la réécriture $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour $\boxed{x > 0}$)

Autre façon de faire : $f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}}{1} = \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}$

Solution détaillée :

$D_f = \mathbb{R}_+$

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = +\infty$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

$\boxed{10}$ $f : x \mapsto x\,\mathrm{e}^{3x-4}$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (changement de variable $X = 3x$; $f(x) = \dfrac{X\mathrm{e}^X}{3\mathrm{e}^4}$)

Solution détaillée :

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

En $-\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $0 \times \infty$ ».

On pose $X = 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{X}{3}$.

$(x \to -\infty) \Leftrightarrow (X \to -\infty)$

$$\begin{aligned} \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= \frac{X}{3}\mathrm{e}^{X-4} \\ &= \frac{X}{3} \times \mathrm{e}^X \times \mathrm{e}^{-4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-4}}{3} \times X\mathrm{e}^X \end{aligned}$$

$\lim\limits_{X \to -\infty} \left(X\mathrm{e}^X\right) = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

Remarque :

Pour la fin, on peut aussi écrire (mais ce n'est pas très utile) :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{X \to -\infty} \left(X\mathrm{e}^X\right) = 0 \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \left(3\mathrm{e}^4\right) = 3\mathrm{e}^4 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

$\boxed{11}$ $f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - x + 3$

1°) $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 1$

Il faut résoudre deux inéquations et une équation.

$2\mathrm{e}^{2x} - 1 > 0$ (1)	$2\mathrm{e}^{2x} - 1 < 0$ (2)	$2\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$ (3)
(1) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} > \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x} > \ln \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 2x > -\ln 2$ $\Leftrightarrow x > -\dfrac{\ln 2}{2}$	(2) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} < \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x} < \ln \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 2x < -\ln 2$ $\Leftrightarrow x < -\dfrac{\ln 2}{2}$	(3) $\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \ln \mathrm{e}^{2x} = \ln \dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow 2x = -\ln 2$ $\Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln 2}{2}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{\ln 2}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\ln 2 + 7}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{\ln 2}{2}\right]$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\ln 2}{2}\,;+\infty\right[$.

$f\left(-\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \dfrac{7 + \ln 2}{2}$ (le calcul du minimum global n'est pas très difficile ; il nécessite de bien utiliser les règles).

Calcul du minimum global :

$$f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)=\mathrm{e}^{2\times\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)}+\frac{\ln 2}{2}+3$$
$$=\mathrm{e}^{-\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}+3$$
$$=\frac{1}{\mathrm{e}^{\ln 2}}+\frac{\ln 2}{2}+3$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}+3$$
$$=\frac{1+\ln 2+6}{2}$$
$$=\frac{\ln 2+7}{2}$$

$\boxed{\text{En } +\infty}$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty-\infty$ ».

Ecrire $f(x)=x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}-1+\frac{3}{x}\right)$ pour $x\neq 0$ puis éventuellement <u>changement de variable</u> pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\right)$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}\right)=+\infty \text{ (théorème de croissance comparée)}^{*}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}\right)=-1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}-1+\frac{3}{x}\right)=+\infty.$$

* Avec le changement de variable $X = 2x$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}-1+\frac{3}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty.$$

$\boxed{\text{En } -\infty}$, <u>pas de changement de variable</u>.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x+3)=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty.$$

Les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ sont égales à $+\infty$.

2°) **Démontrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique.**

$\forall x\in\mathbb{R}\;\; f(x)-(-x+3)=\mathrm{e}^{2x}$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x+3)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{2x}=0$$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=-x+3$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

N.B. : Il est inutile d'écrire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-x+3)\right]=+\infty$.

L'étude de la branche infinie en $+\infty$ sera faite à la question suivante.

3°) **Démontrons que la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.**

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}-x+3}{x}=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}-1+\frac{3}{x}$$

Pour déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}$, il y a 2 possibilités :

- changement de variable ;
- réécriture $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\times\mathrm{e}^{x}$.

On trouve : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}\right)=-1\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction Oy en $+\infty$.

4°) Une équation de T s'écrit : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$.

On calcule séparément $f(0)=4$ et $f'(0)=-1$.

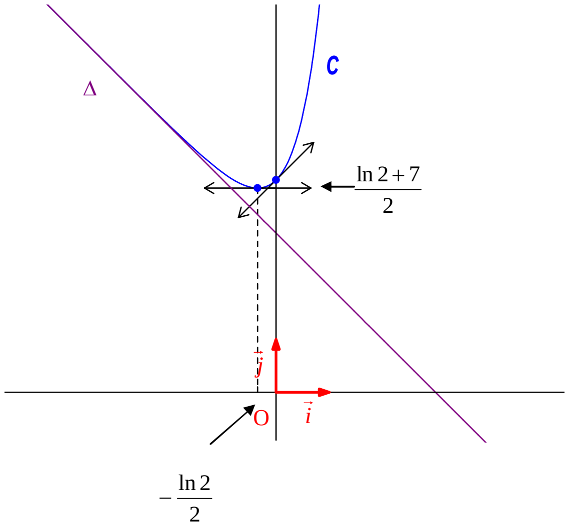
Donc T a pour équation $y=x+4$.

On pourra remarquer que $T\perp\Delta$.

$-\frac{\ln 2}{2}=-0{,}346573590...$

$f\left(-\frac{\ln 2}{2}\right)=3{,}8465735...$

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10	9	8	7	6	5	4,1	4	9,3	55,6	403



C admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.