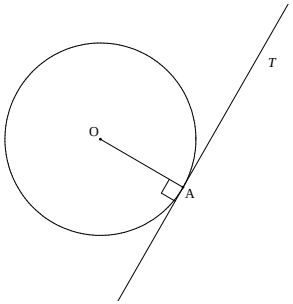
1ère L Option

Tangente à une courbe et nombre dérivé d'une fonction

I. Introduction : la tangente à un cercle

1°) Rappel de la définition

La tangente à un cercle en un point est la droite perpendiculaire au rayon en ce point.



2°) Propriété

La tangente au cercle ne coupe celui-ci qu'en un seul point.

Attention : il n'y a pas de zone de contact ou d'intersection.

3°) Vocabulaire

« point de contact » = « point de tangence »

4°) Origine du mot « tangente »

Tangente < *tangere* en latin qui signifie « toucher »
Au XVIIe siècle, on ne parlait pas de tangente mais de « touchante ».

II. Exemple

On note f la fonction carrée.
On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f.

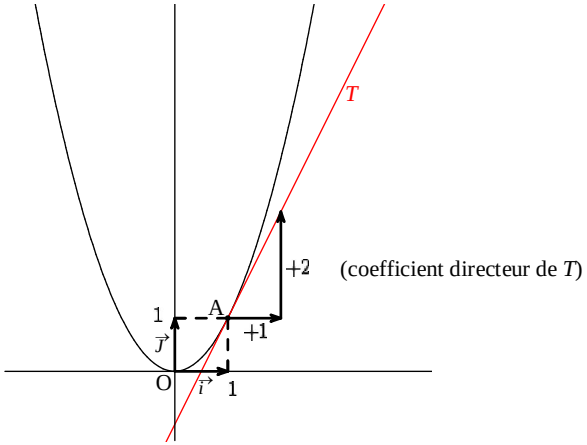
On admet que la droite T est la « tangente » à $\mathcal{C}$.

Commentaires :

- Dans tous les exercices de ce chapitre, on donne la courbe d'une fonction et la tangente en un ou plusieurs points à la courbe.

- Plus tard, on apprendra à tracer nous-même la tangente en un point de la courbe d'une fonction).

On s'intéresse au point A (1 ; 1).



On peut lire graphiquement deux nombres très importants :
- l'un avec la courbe
- l'autre avec la tangente

1er nombre (celui avec la courbe) :

L'image de 1 par la fonction f : $f(1)=1$.

2e nombre (avec la tangente) :

Le coefficient directeur de la tangente (l'ordonnée à l'origine de T nous intéresse pas).

On sait lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite.

On lit graphiquement : 2.

On va le noter non pas $f(1)$ (car c'est l'image de 1 par f) mais avec une notation analogue $f'(1)=2$.
(Pourquoi 1 ? car 1 est l'abscisse du point A).

Ce nombre est si important (on verra pourquoi plus tard) qu'on le baptise d'un nom spécial : on l'appelle **nombre dérivé** de f en 1.

On verra plus tard comment calculer le nombre dérivé sans avoir le graphique.

III. Fonction dérivable en un réel

1°) Définition (fonction dérivable en un réel ; nombre dérivé)

I est un intervalle.
f est une fonction définie sur I.
a est un réel fixé dans I.

- Lorsque la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point d'abscisse a (on parallèle à l'axe des ordonnées), on dit que *f* est **dérivable en *a***.
- Dans ce cas, le coefficient directeur (ou la pente si le repère est orthonormé) de la tangente au point A s'appelle **le nombre dérivé** de *f* en *a*.

2°) Notation

Le nombre dérivé de *f* en *a* est noté $f'(a)$ (notation de Lagrange).

3°) Remarque

⚠ $f(a)$ et $f'(a)$ sont deux nombres différents.

$f(a)$: image de *a* par *f* $\rightarrow$ pour la courbe
$f'(a)$: nombre dérivé de *f* en *a* $\rightarrow$ pour la tangente

IV. Equation réduite de la tangente

1°) Formule (admise sans démonstration)

Une équation de la tangente *T* à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse *a* s'écrit $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Commentaires

a : abscisse du point de contact

2°) Petit exercice

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dérivable en 4 telle que $f(4)=1$ et $f'(4)=2$.

Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 4 en utilisant la formule.

L'équation réduite de *T* s'écrit $y = f'(4)(x-4)+f(4)$
soit $y = 2(x-4)+1$
soit $y = 2x-8+1$
soit $y = 2x-7$