Exercices sur ensembles, applications, relations

$\boxed{1}$ Déterminer une CNS pour que $A\bigcap B = A\bigcup B$. Faire une démonstration ensembliste (sans utiliser les éléments).

$\boxed{2}$ Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
Démontrer que $A\setminus\left(A\setminus B\right) = A\bigcap B$.

$\boxed{3}$ Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
Démontrer que si $A\bigcap B = A$ et $A\bigcup B = A$, alors $A = B$.

$\boxed{4}$ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.
Démontrer que si $A\bigcup C = A\bigcup B$ et $A\bigcap C = A\bigcap B$, alors $B = C$.

$\boxed{5}$ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.
Démontrer que $A\bigcap C = A\bigcap B \Leftrightarrow A\bigcap \complement_E B = A\bigcap \complement_E C$.

(**Indication :** utiliser les fonctions caractéristiques).

$\boxed{6}$ Soit A, B, C trois parties d'un même ensemble E.
Démontrer que $\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus C\right)\bigcup\left(C\setminus A\right) = \left(A\bigcup B\bigcup C\right)\setminus\left(A\bigcap B\bigcap C\right)$.

$\boxed{7}$ Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même telle que $f\circ f = f$.
1°) Démontrer que si f est injective, alors $f = \mathrm{id}_E$.
2°) Démontrer que si f est surjective, alors $f = \mathrm{id}_E$.

$\boxed{8}$ La proposition P : « $\exists\left(a\,;b\right)\in\left(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)^2$, $a>0$ tel que $a^b\in\mathbb{Q}$ » est-elle vraie ou fausse ?

$\boxed{9}$ Démontrer que la proposition P : « Il existe un nombre irrationnel x tel que $x^{\sqrt{2}}$ soit rationnel. » est vraie.
Indication :

Considérer les propositions A : « $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$ » et B : « $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$ ».
(On ne demande pas de déterminer laquelle des deux propositions A ou B est vraie).

$\boxed{10}$ Soit E un ensemble. On considère deux applications f et g de E dans E telles que $f\circ g\circ f = g$ (1) et $g\circ f\circ g = f$ (2).
Démontrer que si l'une des applications f ou g est injective ou surjective, alors elles sont toutes les deux bijectives.

Point de départ :

1°) L'injectivité de f implique immédiatement celle de g.
Démontrer alors la surjectivité de g en partant d'un élément de E.
2°) De même, la surjectivité de f implique celle de g ; il faut alors démontrer l'injectivité de g en partant de deux éléments de E ayant la même image.

Rappel :

$g\circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

$g\circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

$\boxed{11}$ Soit E un ensemble.
On dit qu'une application f de E dans E est **idempotente** lorsque $f\circ f = f$.

Soit f une application idempotente de E dans E.
Démontrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{id}_E$.

$\boxed{12}$ Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. On note k le nombre de classes d'équivalence. On pose $m = \mathrm{card}\left\{\left(x\,;y\right)\in E^2 \,/\, x\,\mathscr{R}\,y\right\}$.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'on a $km\geqslant n^2$.
1°) Pour tout couple $(x\,;y)$ d'éléments de E, on pose $\delta_{x,\,y}=1$ si $x\mathscr{R}y$ et $\delta_{x,\,y}=0$ sinon.

Justifier que l'on a $m = \sum\limits_{(x\,;\,y)\in E^2}\delta_{x,\,y}$.

2°) Soit x un élément fixé dans E. Que vaut $\sum\limits_{y\in E}\delta_{x,\,y}$?

3°) On note n_1, n_2, …, n_k les cardinaux des différentes classes d'équivalence.

En écrivant que $m = \sum\limits_{x\in E}\sum\limits_{y\in E}\delta_{x,\,y}$, démontrer que : $m = {n_1}^2+\ldots+{n_k}^2$.

Indication :
Noter C_1, C_2, …, C_k les différentes classes d'équivalence de $\mathscr{R}$ et écrire

$$m = \sum_{x\in C_1}\sum_{y\in E}\delta_{x,\,y}+\ldots+\sum_{x\in C_k}\sum_{y\in E}\delta_{x,\,y}.$$

4°) Conclure en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz (pour les vecteurs k dimensionnels).

Rappel de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

Soit $\left(x_1\,;x_2\,;\ldots;x_k\right)$ et $\left(y_1\,;y_2\,;\ldots;y_k\right)$ deux k-uplets de réels.

On a : $\left|\sum\limits_{i=1}^{k}x_iy_i\right|\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}{x_i}^2}\times\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{k}{y_i}^2}$.

$\boxed{13}$ Soit A, B, C trois parties d'un même ensemble E.
Démontrer que, si $A\bigcap C\subset B\bigcap C$ et $A\bigcup C\subset B\bigcup C$, alors $A\subset B$.

$\boxed{14}$ Soit A et B deux parties d'un ensemble E. On note $A\,\Delta\,B = \left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)$.
1°) Démontrer que $A\,\Delta\,B = \left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)$.
2°) Caractériser dans chaque cas, les parties A et B de E vérifiant l'égalité proposée :
$A\,\Delta\,B = A\bigcap B$; $A\,\Delta\,B = A\bigcup B$; $A\,\Delta\,B = A\setminus B$; $A\,\Delta\,B = \varnothing$.

15 Soit f_1, f_2, …, f_n des applications d'un ensemble E dans lui-même telles que $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n$ soit injective et $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1$ surjective.
Démontrer que f_1, f_2, ..., f_n sont bijectives.

16 Soit f_1, f_2, f_3 trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Expliquer la signification puis donner un exemple graphique des propriétés suivantes :
a) $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $f_i(a) = 1$.
b) $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ $\forall a \in \mathbb{R}$ $f_i(a) = 1$.
c) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $f_i(a) = 1$
d) $\exists a \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ $f_i(a) = 1$
e) $\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall i \in \{1, 2, 3\}$ $f_i(a) = 1$
f) $\exists a \in \mathbb{R}$ $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $f_i(a) = 1$

17 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1 - x$ si $x \notin \mathbb{Q}$.
Démontrer que *f* est involutive.

18 Soit *T*, *X*, *Y* trois ensembles.
Soit *f* une application de *T* dans *X* et *g* une application de *T* dans *Y*.
On suppose que *f* est surjective.
Pour tout élément *x* de *X*, on note F_x l'ensemble des antécédents de *x* par *f*.
On suppose que pour tout *x* appartenant à *X*, *g* est constante sur F_x.
Pour tout *x* de *X*, on note $h(x)$ l'image par *g* d'un élément quelconque de F_x.
1°) Démontrer que l'on a : $h \circ f = g$.
2°) Soit *B* une partie de *Y*.
On pose $A = g^{-1}(B)$.
Démontrer que $h^{-1}(B) = f(A)$.

19 Soit *E*, *F*, *G* trois ensembles. On considère une application *f* de *E* dans *F* et deux applications g_1 et g_2 de *F* dans *G*.
On suppose que *f* est surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.
Démontrer que $g_1 = g_2$.

20 Soit *f* une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Démontrer que *f* est injective si et seulement si pour tout couple (A ; B) de parties de E on a :
$f(\mathrm{A} \,\Delta\, \mathrm{B}) = f(\mathrm{A}) \,\Delta\, f(\mathrm{B})$.

21 Soit *n* un entier naturel non nul. On pose $E = \{-1 ; 1\}^n$.
Soit *S* la fonction définie de *E* dans $\mathbb{R}$ par $S(x_1 ; x_2 ; \ldots ; x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Déterminer $S(E)$.

22 Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E.
Comparer $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) \cup (\mathrm{C} \cap \mathrm{A})$ et $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) \cap (\mathrm{C} \cup \mathrm{A})$.

23 Soit *E* et *F* deux ensembles.
Soit *f* une application de *E* dans *F* et *g* une application de *F* dans *E*.
On suppose que $f \circ g \circ f$ est bijective.
Démontrer qu'alors *f* et *g* sont bijectives.

24 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x ; y) = (x + y ; xy)$.
1°) Prouver, avec le minimum d'arguments, mais avec le maximum d'efficacité, que *f* n'est ni injective ni surjective.
2°) On considère un élément $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(a ; b)$ admette au moins un antécédent par *f*.
Déterminer suivant la position du point $\mathrm{M}(a ; b)$ dans le plan muni d'un repère le nombre d'antécédents de $(a ; b)$ par *f*.
Déterminer les antécédents de $(a ; b)$ par *f*.
(**Indication :** Il faut se rappeler le résultat suivant sur le trinôme du second degré : si l'on connaît la somme et le produit de deux nombres, ils sont solutions d'une équation du second degré.)

25 On considère quatre ensembles E, F, G, H et trois applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ et $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$.
Démontrer que ($g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives) $\Rightarrow$ (*f*, *g* et *h* bijectives).

26 Soit *A* et *B* deux parties d'un ensemble *E*.
Simplifier :
$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$; $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;
$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

27 Soit *A*, *B*, *C* trois parties d'un ensemble *E*.
Démontrer que si $E = A \cup B \cup C$, si $A \cap D \subset B$, $B \cap D \subset C$, $C \cap D \subset A$, alors $D \subset A \cap B \cap C$.

28 Soit E et F deux ensembles et *f* une application de E dans F.
1°) Démontrer que : $\forall$ (A ; B)$\in(\mathcal{P}(\mathrm{E}))^2$ $f(\mathrm{A}) \,\Delta\, f(\mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A} \,\Delta\, \mathrm{B})$.
2°) Démontrer que *f* est injective si et seulement si : $\forall$(A ; B) $\in(\mathcal{P}(\mathrm{E}))^2$ $f(\mathrm{A} \,\Delta\, \mathrm{B}) \subset f(\mathrm{A}) \,\Delta\, f(\mathrm{B})$.

29 Soit E, F, G trois ensembles et deux applications $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$.
On considère l'application $h :$
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \to & \mathrm{F} \times \mathrm{G} \\ x & \mapsto & h(x) = (f(x), g(x)) \end{array}.$$
1°) Démontrer que si *f* ou *g* est injective, alors *h* est injective.
2°) Dans cette question seulement, on suppose que *h* est l'application
$$\begin{array}{rcl}]-\pi ; \pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (\sin x, x^2) \end{array}.$$
h est-elle injective ? Même question pour *f* et *g*.
3°) Démontrer que si *h* est surjective, alors *f* et *g* sont surjectives.
4°) Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que la réciproque est fausse (c'est-à-dire : donner une application *h* non surjective telle que *f* et *g* soient surjectives ; justifier la réponse).

30 Soit E un ensemble. On note A et B deux parties de E.
On considère l'application $f :$
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}(\mathrm{E}) & \to & \mathcal{P}(\mathrm{A}) \times \mathcal{P}(\mathrm{B}) \\ \mathrm{X} & \mapsto & (\mathrm{X} \cap \mathrm{A}, \mathrm{X} \cap \mathrm{B}) \end{array}.$$
1°) Déterminer les images par *f* de $\varnothing$, E, A, B, $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.
2°) Démontrer que *f* est injective si et seulement si $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{E}$.
3°) Démontrer que *f* est surjective si et seulement si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.
Indication : on pourra considérer la partie X de $\mathcal{P}(\mathrm{E})$ telle que $f(\mathrm{X}) = (\{x_0\}, \varnothing)$, avec $x_0 \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.
4°) Déterminer les conditions pour que *f* soit bijective ; donner f^{-1} dans ce cas.

31 Soit A et B deux parties d'un ensemble E.
Démontrer que l'on a : $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

32 On pose $G = U_7$.
1°) Démontrer que l'application $f : \begin{array}{l} G \to G \\ z \mapsto z^3 \end{array}$ est une bijection.
2°) Calculer $\prod\limits_{\alpha \in G} \left(1+\alpha+\alpha^2\right)$.

33 Soit f une application de E dans $\mathcal{P}$(E).
Démontrer que $A = \{x \in E \ / \ x \in f(x)\}$ n'a pas d'antécédent par *f*. Conclure.

34 L'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + (-1)^n$ est-elle une bijection ? Si oui, préciser la bijection réciproque.
Même question avec l'application g de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par $g(n) = n + (-1)^{n+1}$.

Il est intéressant d'étudier l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

35 Soit $f : x \mapsto \cos(\cos x)$.
1°) Déterminer $f(\mathbb{R})$ (sous la forme la plus simple possible).
2°) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur deux réels *x* et *y* tels que $f(x) = f(y)$ (sous la forme la plus simple possible).

36

1°) Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $A_n = \{1, 2, 3..., n\}$.
m étant un entier naturel non nul donné, préciser chacun des ensembles suivants : $\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i$ et $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$.
2°) Pour tout entier naturel *n* non nul, on pose $B_n = \{k \in \mathbb{N} \ / \ k \geqslant n\}$.
m étant un entier naturel non nul donné, préciser chacun des ensembles : $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} B_i$ et $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$.

37 On considère l'application $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$.

Déterminer l'image directe par *f* des intervalles $[1 ; 3]$, $[-4 ; -2]$, $[-1 ; 5]$, $]-\infty ; -1[$.

38 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x ; y) = (x+y ; x-y)$.
Démontrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

39 Soit $f : x \mapsto x|x|$.
Démontrer que *f* est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et déterminer sa bijection réciproque.

40 Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$.
Déterminer $f(\mathbb{R} \setminus \{1\})$.

41 Soit f la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.
Déterminer $f(\mathbb{C} \setminus \{1\})$.

42 Soit f une application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telle que pour tout entier relatif *n*, on ait $\left[f(n)\right]^2 \leqslant n^2$.
Démontrer que si *f* est injective alors *f* est bijective.

43 On pose $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 3x - y + z = 0\}$.
Donner trois éléments de *E*.

44 Soit *E* un ensemble et une application $f : E \to E$.
Démontrer que pour tout élément *x* de E, *x* point fixe de *f* $\Rightarrow$ *x* point fixe de $f \circ f$.

45 Soit *E* un ensemble et une application $f : E \to E$.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 \in E$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la suite (u_n) est constante $\Leftrightarrow f(u_0) = u_0$.

46 Soit f une application d'un ensemble *E* dans lui-même.
Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de son premier terme $u_0 \in E$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose qu'il existe un entier naturel $p \geqslant 1$ tel que $u_p = u_0$.
Démontrer que la suite (u_n) est périodique de période *p*.

Applications :

① Soit α et β deux réels strictement positifs. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ et $u_n = \dfrac{1+u_{n-1}}{u_{n-2}}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.
Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.
Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

② On considère la suite (u_n) réelle définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + (-1)^n u_n$ pour tout entier naturel *n*.
Démontrer que la suite (u_n) est périodique.

③ On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses deux premiers termes $u_0 = a$ et $u_1 = b$ où *a* et *b* sont des réels ainsi que par la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel *n*.
Démontrer que la suite (u_n) est périodique.

$\boxed{47}$ Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même.
On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $f^p = \mathrm{id}_E$.
Que peut-on dire de la suite (u_n) définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in E$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$?

$\boxed{48}$ L'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \mathrm{e}^z \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ?
Préciser $f(\mathbb{C})$.

$\boxed{49}$ L'application $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + \dfrac{1}{z} \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$\boxed{50}$ Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E tels que $A \bigcup B = A \bigcap C$, $B \bigcup C = B \bigcap A$ et $C \bigcup A = C \bigcap B$.
Démontrer que $A = B = C$.

$\boxed{51}$ Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On note A le point d'affixe i et on pose $P^* = P \setminus \{\mathrm{A}\}$.
On note f l'application de P^* dans P qui, à tout point M de P^*, d'affixe $z \neq \mathrm{i}$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\mathrm{i}z}{z - \mathrm{i}}$.
1°) Déterminer les points invariants par f.
2°) Déterminer $f\left(P^*\right)$.
3°) Démontrer que f établit une bijection de P^* dans lui-même et déterminer f^{-1}. Que constate-t-on ?

$\boxed{52}$ On pose $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{\,\mathrm{i}\,\}$. On note f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{\mathrm{i}z}{z - \mathrm{i}}$.
1°) Déterminer $f\left(\mathbb{C}^*\right)$.
2°) Démontrer que f établit une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même et déterminer f^{-1}. Que constate-t-on ?

$\boxed{53}$ On pose $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{\,1\,\}$. On note f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$.
1°) Déterminer $f\left(\mathbb{C}^*\right)$.
2°) Démontrer que f établit une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans $f\left(\mathbb{C}^*\right)$ et déterminer f^{-1}. Que constate-t-on ?

Corrigé

1 Démontrons que $A\cap B=A\cup B \Rightarrow A=B$.

1[ère] méthode : On démontre la double inclusion

$A\subset A\cup B=A\cap B\subset B$

$B\subset A\cup B=A\cap B\subset A$

2[e] méthode : On utilise les fonctions caractéristiques

$1_A+1_B-21_A1_B=0$
$1_A{}^2+1_B{}^2-21_A1_B=0$

La fonction caractéristique d'un ensemble élevée à n'importe quelle puissance donne la fonction caractéristique.

3 Idem **1**

8 $a=\mathrm{e}$ et $b=\ln 2$

9 Si A est vraie, alors P est vraie $\left(x=\sqrt{2}\right)$.

Si B est vraie, alors P est vraie $\left(x=\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)$.

10 1°) On suppose que *f* est injective.
Démontrons que *g* est surjective.

$\forall z\in E\ \ (f\circ g\circ f)(z)=g(z)$ et $(g\circ f\circ g)(z)=f(z)$

Soit $y\in E$.
$(g\circ f\circ g)(y)=f(y)$
$g\left[f\circ g(y)\right]=f(y)$

On pose : $z=f\circ g(y)$.
$g(z)=f(y)$ donc $f\left[(g\circ f)(z)\right]=f(y)$.
L'injectivité de *f* entraîne $(g\circ f)(z)=y$ donc *g* est surjective.

11 idem **7**

13 On prend $x\in A$.
Il y a deux cas :
1[er] cas : $x\in C$
2[e] cas : $x\notin C$

34 On commence par effectuer les calculs des images de pas mal d'entiers (éventuellement grâce à la calculatrice).

$f(0)=1,\ f(1)=0,\ f(2)=3$

On peut aisément conjecturer que *f* est bijective.
Pour le démontrer, on raisonne par analyse-synthèse.
On obtient l'expression de la bijection réciproque de *f* : $f^{-1}(x)=x+(-1)^x$.
Autrement dit, $f^{-1}=f$. On en déduit que f est involutive.

35

1°) $f(\mathbb{R})=[\cos 1\,;1]$ (on peut le vérifier graphiquement)
2°) $f(x)=f(y)$ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $\cos x=\cos y$ ou $\cos x=-\cos y$

On doit aller plus loin pour donner des conditions nécessaire et suffisante sur *x* et *y*.

37

On utilise la notation du cours (on a le droit de l'utiliser sans problème).

$f([1\,;3])=[1\,;9],\ f([-4\,;-2])=[4\,;16],\ f([-1\,;5])=[0\,;25],\ f(]-\infty\,;-1[)=]1\,;+\infty[$.

28 On pose $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,3x-y+z=0\right\}$.
Donner trois éléments de *E*.
$(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,4,1)$

Questions de cours

$\boxed{1}$ Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Donner la définition de **« *f* est surjective »** ; donner une formulation sous forme de phrase quantifiée.
Donner un exemple d'application surjective.
Traduire sous forme de phrase quantifiée la proposition **« *f* n'est pas surjective »**.

$\boxed{2}$ Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.
Donner la définition de **« *f* est une application injective »** ; donner une formulation sous forme de phrase quantifiée.
Donner un exemple d'application injective.
Traduire sous forme de phrase quantifiée la proposition **« *f* n'est pas injective »**.

$\boxed{3}$ Donner la définition de $P \Rightarrow Q$.
Donner la négation de $P \Rightarrow Q$.
Donner la contraposée de $P \Rightarrow Q$.

$\boxed{4}$ Image directe ; image réciproque d'une partie par une application.

$\boxed{5}$ Définition d'une application bijective ; bijection réciproque. Caractérisation.

$\boxed{6}$ Graphe fonctionnel ; fonction.

$\boxed{7}$ Relation d'équivalence. Définition ; classes d'équivalence ; propriétés.

$\boxed{8}$ Image réciproque d'une partie (définition et propriétés).

$\boxed{9}$ Relation d'ordre. Majorant, minorant, plus petit élément, plus grand élément.

$\boxed{10}$ Composée d'applications (définition, exemples et propriétés).

$\boxed{11}$ Donner la définition de $A \setminus B$ où A et B sont deux parties d'un ensemble E.

$\boxed{12}$ Donner la définition d'une application injective, d'une application surjective et d'une application bijective d'un ensemble E dans un ensemble F en utilisant les mots : « antécédent », « au plus », « au moins ».

$\boxed{13}$ Dans un ensemble ordonné, partie majorée, minorée, bornée.
Plus petit élément, plus grand élément : définition et propriété d'unicité.
Maximum et minimum.

$\boxed{14}$ Relation d'ordre. Relation d'ordre total, relation d'ordre partiel.

$\boxed{15}$ Relation d'ordre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ordre lexico-graphique.

$\boxed{16}$ Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. Soit (u_n) une suite définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in E$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrer que la suite (u_n) est constante si et seulement si $f(u_0) = u_0$.

À noter : $D_{g \circ f} = D_f \cap f^{-1}(D_g)$