Exercices sur entiers naturels et dénombrement

1 Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel n, on ait : $(f \circ f)(n) = n+1$.

On pose $p = f(0) \in \mathbb{N}$.

1°) Démontrer que $f(p) = 1$ et $f(1) = p+1$.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel k, on a : $f(p+k) = k+1$ et $f(k+1) = p+k+1$.

3°) Aboutir à une contradiction et en déduire qu'une telle application n'existe pas.

2 Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifie la propriété suivante :

pour tout entier naturel n, $f(n+1) = f(f(n)) + 1$.

1°) Soit n un entier naturel. On suppose que $f(n) = n$. Démontrer qu'alors $f(n+1) = n+1$.

2°) a) Démontrer qu'il existe un entier naturel a non nul tel que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $f(a) \leqslant f(n)$.

On fixe a dans les questions suivantes.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $f(a) > f(n) \Rightarrow n = 0$.

c) Démontrer que $f(a) > f(f(a-1))$.

d) En déduire que $f(a) > 0$ et que $f(a-1) = 0$.

e) En déduire que $a = 1$.

3°) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $f(n) = n$.

3 Un **polygone** est une figure géométrique à plusieurs côtés définis par des points appelés sommets. Deux sommets tels que le segment qui les joigne soit un côté sont dits **consécutifs**.
Une **diagonale** d'un polygone est un segment dont les extrémités sont deux sommets non consécutifs de ce polygone.
Un polygone est dit **convexe** lorsqu'il contient toutes ses diagonales.

Le but de l'exercice est de trouver une expression explicite en fonction de n du nombre d_n de diagonales d'un polygone convexe à n côtés (n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3).

1°) Déterminer d_3, d_4, d_5, d_6, d_7.

Conjecturer une expression de $d_{n+1} - d_n$ en fonction de n $(n \geqslant 3)$.

2°) On se propose de démontrer cette conjecture.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 3 donné, on considère un polygone convexe P_{n+1} à $n+1$ côtés et donc $n+1$ sommets. On note alors A l'un de ses sommets et B et C les deux sommets consécutifs de P_{n+1} à A.

a) Déterminer en fonction de n le nombre de diagonales de P_{n+1} qui ont pour sommet A.

b) Déterminer en fonction de d_n le nombre de diagonales de P_{n+1} qui n'ont pas pour sommet A.

c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $d_{n+1} = d_n + n - 1$.

3°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a : $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2}$.

4°) Retrouver le résultat précédent en utilisant les combinaisons.

4 Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $p < n$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - \binom{n}{p}x + \binom{n-1}{p-1}\binom{n-1}{p} = 0$.

Penser à $x^2 - Sx + P = 0$.

5 Cinq personnes votent pour un projet ; il y a trois possibilités : pour, contre, abstention.
Calculer la probabilité qu'une décision soit prise* :
1°) avec une majorité relative de pour ou de contre ;
2°) avec une majorité absolue de pour ou de contre.

* Une décision est prise lorsque le projet est retenu ou lorsque le projet est rejeté.

6 Soit n et p deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant p$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=p}^{k=n} \mathrm{C}_k^p$.

Indication :

On pourra écrire la somme en extension et remplacer le terme C_p^p par C_{p+1}^{p+1}.

7 On range les entiers 1, 2, 3, 4 dans un ordre quelconque.
1°) Quel est le nombre de rangements possibles ?
2°) Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 4$, on définit l'événement A_i : « l'entier i est à sa place ».

Calculer $\operatorname{card} \mathrm{A}_i$.

3°) On admet que :

$$\operatorname{card}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \mathrm{A}_3 \cup \mathrm{A}_4) = \sum_{i=1}^{4} \operatorname{card} \mathrm{A}_i - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \operatorname{card}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant 4} \operatorname{card}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j \cap \mathrm{A}_k) - \operatorname{card}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 \cap \mathrm{A}_4).$$

(formule du crible).
Combien y a-t-il de rangements pour lesquels

- au moins un entier est à sa place ?
- aucun entier n'est à sa place ?

Autre version :

A **Formule du crible**

Soit A_1, A_2, …, A_n n parties ($n \in \mathbb{N}^*$) d'un ensemble fini E.

$$\operatorname{card}(\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(\mathrm{A}_{i_1} \cap \mathrm{A}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathrm{A}_{i_n}) \right)$$ c'est-à-dire que le cardinal de la réunion est égal à la somme des cardinaux des parties – somme des cardinaux des intersections 2 à 2 + somme des intersections 3 à 3 – …etc.

B On range les entiers 1, 2, 3, 4 dans un ordre quelconque.
Combien y a-t-il de rangements pour lesquels :

- au moins un entier est à sa place ?
- aucun entier n'est à sa place ?

Indication : Noter A_i l'ensemble des rangements avec l'entier i à sa place.

9 Soit n un entier naturel.

Développer $(1+\mathrm{i})^{2n}$; en déduire $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_{2n}^{2k}$.

10 1°) Soit n et p deux entiers naturels quelconques tels que $n \geqslant p$.

Calculer $\sum_{k=p}^{n} \mathrm{C}_k^p$.

Indications :
Écrire la somme en extension.
Utiliser la formule de Pascal pour exprimer chaque terme comme différence (principe des **dominos additifs**).
2°) Soit n et p deux entiers naturels quelconques tels que $n > p$.

Démontrer que l'on a : $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \mathrm{C}_k^p = (-1)^p \mathrm{C}_{n-1}^p$.

3°) Soit n un entier naturel.

En observant que $(-1)^k = \mathrm{i}^{2k}$, calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \mathrm{C}_{2n}^{2k}$.

11 1°) Pour tout entier naturel n non nul, on note P_n le nombre de partitions de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Démontrer que $P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k P_k$.

2°) Pour tout couple (n ; p) d'entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$, on note $P_{n,\,p}$ le nombre de partitions de $\{1,\ 2,\ \ldots, n\}$ en p sous-ensembles.

Démontrer que $P_{n+1,\,p+1} = P_{n,\,p} + (p+1)P_{n,\,p+1}$.

12 1°) On pose $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

a) Vérifier que $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2 = 0$ et que $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$.

Dans la suite, on utilisera les relations $1+\mathrm{j} = -\mathrm{j}^2 = -\bar{\mathrm{j}}$.

Écrire $-\bar{\mathrm{j}}$ et $-\mathrm{j}$ sous forme exponentielle.

b) Soit k un entier naturel.

Exprimer j^k et j^{2k} selon la congruence de k modulo 3.

2°) Soit n un entier naturel.

On pose $\mathrm{A} = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)}} \mathrm{C}_n^k$, $\mathrm{B} = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)}} \mathrm{C}_n^k$, $\mathrm{C} = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)}} \mathrm{C}_n^k$.

Calculer $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}$, $\mathrm{A}+\mathrm{jB}+\mathrm{j}^2\mathrm{C}$, $\mathrm{A}+\mathrm{j}^2\mathrm{B}+\mathrm{jC}$; en déduire A, B, C en fonction de n (expressions à l'aide du cosinus).

Vérifier directement sur l'expression de A obtenue que le résultat est entier.

13 Soit n un entier naturel strictement positif. On pose $E_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Étant donnés une application f de E_n dans lui-même et $k \in E_n$, on dit que f admet k comme coïncidence si $f(k) = k$.

Pour tout entier naturel i tel que $0 \leqslant i \leqslant n$, on note I_i l'ensemble des bijections de E_n admettant exactement i coïncidences.

1°) En utilisant la formule de Poincaré, démontrer que $\mathrm{card}\ I_0 = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

2°) Soit j un entier naturel tel que $0 \leqslant j \leqslant n$. Démontrer que $\mathrm{card}\ I_j = \binom{n}{j}(n-j)!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

3°) Que deviennent les résultats précédents lorsque l'on s'intéresse à des applications quelconques de E_n au lieu de s'intéresser aux bijections ?

14 On considère n droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n$ quelconques du plan $\mathcal{P}$, deux à deux sécantes et trois à trois non concourantes. On note a_n le nombre de régions délimitées par ces n droites.

1°) Calculer a_1, a_2, a_3.

2°) Soit $n \geqslant 2$. Les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}$ délimitent a_{n-1} régions. Combien d'entre elles sont-elles traversées, et donc partagées en deux, par la droite $\mathcal{D}_n$? (On déduira cet entier du nombre de points d'intersection de $\mathcal{D}_n$ avec $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}$).

En déduire que $a_n = a_{n-1} + n$.

En déduire l'expression de a_n en fonction de n.

3°) On considère n plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ de l'espace $\mathcal{E}$, deux à deux sécants tels que les droites d'intersection soient deux à deux distinctes. On note b_n le nombre de régions délimitées par ces n plans.

Démontrer que $b_{n+1} = b_n + a_n$. En déduire l'expression de b_n en fonction de n.

15 1°) Pour tout entier naturel n, on note E_n l'ensemble des carrés parfaits compris entre 1 et n (au sens large).
Calculer $\mathrm{card}\ E_n$.
2°) Soit n un entier naturel. Calculer le nombre d'entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à n.
3°) Soit n un entier naturel. Calculer le nombre d'entiers naturels multiples de 3 inférieurs ou égaux à n.

16 Soit $\Omega = \{1 ; 2 ; .... ; 10\}^n$ où n est un entier naturel non nul.
1°) Calculer le cardinal de Ω.
2°) Soit i un entier naturel tel que $1 \leqslant i \leqslant 10$.

a) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathrm{A}_i = \{(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n) \in \Omega \,/\, \forall k \in [\![1 ; n]\!] \quad a_k \leqslant i\}$.

b) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathrm{B}_i = \{(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n) \in \Omega \,/\, \max(a_k) = i\}$.

c) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathrm{C}_i = \{(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n) \in \Omega \,/\, \forall k \in [\![1 ; n]\!] \quad a_k \geqslant i\}$.

d) Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathrm{D}_i = \{(a_1 ; a_2 ; ... ; a_n) \in \Omega \,/\, \min a_k = i\}$.

17 Soit $\mathrm{E} = \{1 ; 2 ; .... ; 10\}$.
On note Ω l'ensemble des triplets d'éléments de E.
1°) Calculer le cardinal de Ω.
2°) Déterminer le cardinal de l'ensemble A des triplets d'éléments de E contenant au moins un nombre impair.
3°) Calculer le cardinal de l'ensemble B des triplets d'éléments de E contenant exactement un nombre impair.
4°) Calculer l'ensemble de l'ensemble C des triplets d'éléments de E contenant au moins un nombre impair et un carré parfait.
5°) Calculer l'ensemble de l'ensemble D des triplets d'éléments de E contenant exactement un nombre impair et un carré parfait.

18 Le but de l'exercice est de démontrer que l'application identité sur $\mathbb{N}$ est la seule application de $\mathbb{N}$ dans lui-même telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n+1) > f(f(n))$.
1°) Pour tout entier naturel *p*, on considère l'ensemble M_p des nombres entiers supérieurs ou égaux à *p*.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *p* l'ensemble M_p est stable par *f*.
2°) À l'aide du résultat de la question précédente, démontrer que *f* est strictement croissante.
3°) Conclure ensuite pour *f*.

19 On pose $\mathrm{E} = \{1 ; \ldots ; n\}$ où *n* est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 1.
Pour $p \in [\![1 ; n]\!]$, on note $\mathcal{P}_p(\mathrm{E})$ l'ensemble des parties de E de cardinal *p*.
On considère l'application par $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{P}_p(\mathrm{E}) \to \mathrm{E} \\ \mathrm{A} \mapsto \min \mathrm{A} \end{array}$.
1°) a) Démontrer que le nombre de parties A de E à *p* éléments qui ont pour image *k* par φ est égal à

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{n-k}^{p-1} & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant n-p+1 \\ 0 & \text{si } k > n-p+1 \end{cases}.$$

b) En remarquant que l'on obtient une partition de $\mathcal{P}_p(\mathrm{E})$ en faisant varier *k*, en déduire l'égalité

$$\mathrm{C}_n^p = \sum_{k=1}^{n-p+1} \mathrm{C}_{n-k}^{p-1}.$$

2°) Quelle égalité obtient-t-on en reprenant les questions précédentes avec l'application
$\psi : \begin{array}{l} \mathcal{P}_p(\mathrm{E}) \to \mathrm{E} \\ \mathrm{A} \mapsto \max \mathrm{A} \end{array}$?

20 1°) Soit *f* une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel *n*, on ait : $f(n) \leqslant n$.
Démontrer que si *f* est injective, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
2°) Soit *f* une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel *n*, on ait : $f(n) \geqslant n$.
Démontrer que si *f* est bijective, alors $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.
3°) Déterminer une bijection *f* de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier naturel *n*, on ait : $f(n) \neq n$.

21 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers naturels non nuls tels que our tout entier naturel *n* non nul, on ait :

$$\sum_{k=1}^{n} {u_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right)^2.$$

Démontrer que pour tout entier naturel *n* non nul, on a : $u_n = n$.

22 Soit (a_j) une suite de nombres complexes définie sur $\mathbb{N}$.

On pose $P_0 = 1$ et pour tout entier naturel *k* non nul, on pose : $P_k = \prod_{j=1}^{k} (1 - a_j)$.

1°) Soit *k* un entier naturel non nul. Quelle relation très simple existe-t-il entre P_k et P_{k+1} ?

2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *k* non nul, on a : $P_k + \sum_{i=1}^{k} a_i P_{i-1} = 1$.

3°) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose $a_j = \dfrac{j}{n}$ de sorte que $P_k = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \dfrac{j}{n}\right)$.

a) Calculer P_n.

b) Démontrer que pour tout $k \in [\![1 ; n-1]\!]$, on a $P_k = \dfrac{k!}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

c) La formule de la question précédente est-elle encore valable pour $k = 0$?

d) Démontrer que l'on a $\sum_{k=1}^{n} \dbinom{n-1}{k-1} \dfrac{k!}{n^k} = 1$.

23 Soit *E* un ensemble de 10 nombres deux à deux distincts compris entre 1 et 100.
Démontrer qu'il existe au moins deux parties de *E* dont la somme des éléments est égale.

24 1°) Soit *n* et *p* deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.
Déterminer l'ensemble des *p*-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ d'éléments de $[\![1 ; n]\!]$ tels que : $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.
2°) Soit *n* un entier naturel non nul.
Déterminer l'ensemble des *p*-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ d'éléments de $[\![1 ; n]\!]$ tels que : $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p$.

25 Soit *n* et *p* deux entiers naturels tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.
Déterminer l'ensemble des *p*-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ d'éléments de $[\![1 ; n]\!]$ tels que le maximum de i_1, i_2, …, i_p soit égal à *n*.

26 Pour tout entier naturel *n*, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} k$ et on note u_n le chiffre des unités de S_n.

Démontrer que la suite (u_n) est périodique.

27 Combien y a-t-il d'applications *f* de $\{1, \ldots, 12\}$ dans lui-même possédant :
1. la propriété : *n* est pair $\Rightarrow$ $f(n)$ est pair ?
2. la propriété : *n* est divisible par 3 $\Rightarrow$ $f(n)$ est divisible par 3 ?
3. ces deux propriétés à la fois ?

Reprendre les questions précédentes en remplaçant application par bijection.

28 1°) On pose $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit σ une permutation de l'ensemble E.
À tout élément i de E, on associe le nombre $\sigma'(i)$ tel que $\sigma(i) + \sigma'(i) = 6$.
Démontrer que l'application σ' ainsi définie est une bijection de E dans E.
2°) Calculer la somme de tous les nombres de cinq chiffres qui contiennent une et une seule fois chaque chiffre de 1 à 5.

29 Soit A et B deux ensembles finis de cardinaux respectifs m et n tels que $A \subset B$.
Dénombrer les ensembles X tels que $A \subset X \subset B$.

30 De combien de façons peut-on ranger p boules dans deux tiroirs de telle sorte qu'aucun des deux tiroirs ne soit vide ?

31 Soit E un ensemble fini de cardinal n. On pose $S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} X$.
1°) Démontrer que $S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} \overline{X}$.
2°) Démontrer que $2S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{card} E$; en déduire la valeur de S.
3°) Déduire du 2°) la valeur de $\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p}$.
4°) Pour n et p appartenant à $\mathbb{N}^*$, donner l'expression de $p\binom{n}{p}$ en fonction de $\binom{n-1}{p-1}$ et l'utiliser pour retrouver le résultat du 3°).

32 Soit n un entier naturel non nul. On note U l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.
Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Déterminer le nombre de p-uplets $(z_1, z_2, ..., z_p)$ d'éléments de U tels que $z_1 z_2 ... z_p = 1$.

33 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Déterminer le nombre de p-uplets sans répétition d'éléments de $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$ ($2 \leqslant p \leqslant n$) tels que le plus petit élément soit en première position et le plus grand en dernière position ?

34 Dans une affaire criminelle, on dispose de six suspects, que l'on désigne par les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Quatre témoins affirment avoir vu l'auteur des faits.
Chacun d'eux participe à une séance d'identification et désigne à chaque fois un seul suspect.
Si les témoins répondent au hasard, quelle est la probabilité que :
- au moins deux d'entre eux désignent le même suspect ?
- au moins deux d'entre eux désignent le suspect N°1 ?

35 Soit E un ensemble. Pour toute partie F de E, on note φ_F sa fonction indicatrice.
1°) Question préliminaire
A et B étant deux parties de E. Exprimer $\varphi_{A \Delta B}$ en fonction de φ_A et φ_B.
2°) On suppose que E est fini de cardinal n et l'on note $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses parties.
Calculer $S = \sum_{(A, B) \in \mathcal{P}^2} \operatorname{card}(A \,\Delta\, B)$.

36 **Les trous de Kaplansky**
Soit n et p deux entiers naturels non nuls fixés et L un entier naturel fixé. On note E_L l'ensemble des suites croissantes à p termes $(x_1, x_2, ..., x_p)$ d'éléments de $\{1, 2, ..., n\}$ telles que pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant p-1$ on ait $x_{k+1} - x_k > L$.
On cherche à déterminer le cardinal de E_L.
1°) Résoudre le problème pour $n = 6$, $p = 2$, $L = 2$.
2°) À toute suite $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de E_L on associe la suite $(y_1, y_2, ..., y_p)$ définie par $y_1 = x_1$, … , $y_k = x_k - (k-1)L$, …, $y_p = x_p - (p-1)L$.
Démontrer que $(y_1, y_2, ..., y_p)$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels compris entre 1 et $n - (p-1)L$.
3°) Démontrer que l'on définit ainsi une bijection de E_L sur l'ensemble des suites strictement croissantes à p termes d'entiers compris entre 1 et $n - (p-1)L$.
En déduire que : $\operatorname{card} E_L = \binom{n-(p-1)L}{p}$.
4°) **Applications**
a) Au loto, on appelle tirage une liste strictement croissante de 6 éléments de l'ensemble $\{1 ; 2 ; \dots ; 49\}$.
Les tirages se font au hasard.
Quelle est la probabilité pour que dans un tirage il y ait au moins deux entiers consécutifs ?
b) Quel est le nombre de « mots » de longueur n ($n > 1$) composés de lettres appartenant à $\{a ; b\}$ pour lesquels deux lettres a ne se suivent pas ?
Calculer ce nombre pour $n = 10$.

37 Soit E un ensemble. Pour toute partie F de E, on note φ_F sa fonction indicatrice.
1°) Question préliminaire
Soit A et B deux parties quelconques de E. Exprimer $\varphi_{A \Delta B}$ en fonction de φ_A et φ_B.
2°) On suppose que E est fini et on considère n parties A_1, A_2, …, A_n de E ainsi que n entiers relatifs α_1, α_2, …, α_n vérifiant $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$.
Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on pose $t_{i,j} = \operatorname{card}(A_i \,\Delta\, A_j)$.
On pose également $S = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \alpha_i \alpha_j t_{i,j}$.
Démontrer que $S \leqslant 0$.

38 Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Calculer $S = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \frac{1}{\operatorname{card} A + 1}$.

39 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{C_n^k}{k}$.
Démontrer par récurrence sur n que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

40 On considère un ensemble E de cardinal n. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de E dans E. Pour toute application $f \in \mathcal{A}$, on pose $\mathrm{T}(f)=\{x \in \mathrm{E} \,/\, f(x)=x\}$.

1°) Soit A une partie fixée de E de cardinal k.
Calculer le nombre d'applications $f \in \mathcal{A}$ telles que $\mathrm{T}(f)=\mathrm{A}$.

2°) Calculer $\displaystyle\sum_{f \in \mathcal{A}} \mathrm{card}\, \mathrm{T}(f)$.

41 Dans cet exercice, on adopte la convention $\mathrm{C}_i^j=0$ si i et j sont deux entiers naturels tels que $i<j$.
Soit m, p, q trois entiers naturels tels que $m \leqslant p+q$.
1°) On considère un ensemble E de cardinal $p+q$ et l'on note A et B deux parties disjointes de E de cardinaux respectifs p et q.
Soit k un entier naturel fixé compris entre 0 et m.
Calculer le nombre de parties X de E de cardinal m telles que $\mathrm{card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{X})=k$.

2°) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_q^{m-k}$.

41 bis

1°) Dans cette question, on adopte la convention $\mathrm{C}_i^j=0$ si i et j sont deux entiers naturels tels que $i<j$.
Soit m, p, q trois entiers naturels tels que $m \leqslant p+q$.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_p^k \mathrm{C}_q^{m-k}$.

Indication : On pourra utiliser une méthode ensembliste en considérant un ensemble E de cardinal $p+q$ « scindé » en deux sous-ensembles disjoints A et B de cardinaux respectifs p et q et dénombrer de 2 manières différentes les parties de E de cardinal m.

2°) Soit n un entier naturel quelconque. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$.

42 Remplir une grille de loto consiste à choisir 6 entiers distincts ou non de 1 à 49 sans tenir compte de l'ordre. Déterminer le nombre de façons de remplir une grille de loto telles qu'il n'y ait pas deux entiers consécutifs.

Indication :

Noter n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 les six entiers choisis rangés dans l'ordre crossant et considérer les entiers $n'_i=n_i-i$ pour $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Démontrer qu'il n'y a pas deux entiers consécutifs dans la famille $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ si et seulement si n'_1, n'_2, n'_3, n'_4, n'_5, n'_6 sont tous distincts.

43 On considère un entier naturel $n>2$ et un réseaux de n ordinateurs. Chaque ordinateur est relié à aucun, un ou plusieurs autres ordinateurs du réseaux. On considère que cette relation est symétrique : si un ordinateur A est relié à un ordinateur B, alors B est relié à A. Par contre, A n'est pas relié à lui-même.
Démontrer qu'il existe deux ordinateurs dans le réseau qui ont le même nombre de connexion (qui sont reliés au même nombre d'ordinateur). On considérera l'application N qui à l'ordinateur $i \in [\![1\,;n]\!]$ associe le nombre de connexions N_i.

44 **Dénombrement des parties de $[\![1\,;n]\!]$ contenant deux entiers consécutifs**

Il peut être intéressant de poser $S_n=[\![1\,;n]\!]$.

Étant donné un entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose
$\mathrm{A}_n=\left\{\mathrm{X} \in \mathcal{P}([\![1\,;n]\!]) \,/\, \exists i \in [\![1\,;n-1]\!] \text{ vérifiant } i \in \mathrm{X} \text{ et } (i+1) \in \mathrm{X}\right\}$, et on note B_n le complémentaire de A_n dans $\mathcal{P}([\![1\,;n]\!])$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, A_n est l'ensemble des parties de $[\![1\,;n]\!]$ contenant (au moins) deux entiers consécutifs et B_n est l'ensemble des parties ne contenant pas deux entiers consécutifs.

1°) Donner trois éléments de A_6 puis quatre éléments de B_{10}.

2°) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles A_n et B_n sont finis. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$ $a_n=\mathrm{card}\,\mathrm{A}_n$ et $b_n=\mathrm{card}\,\mathrm{B}_n$. Expliciter les ensembles A_0, A_1, A_2, B_0, B_1 et B_2. En déduire les valeurs de a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 et b_2.

3°) Soit n un entier naturel. En considérant les ensembles $\mathrm{H}=\left\{\mathrm{X} \in \mathrm{B}_{n+2} \,/\, (n+2) \in \mathrm{X}\right\}$, et $\mathrm{K}=\left\{\mathrm{X} \in \mathrm{B}_{n+2} \,/\, (n+2) \notin \mathrm{X}\right\}$, trouver une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

4°) Donner une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n.

5°) Exprimer a_n en fonction de n.

6°) Trouver un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n>n_0$, la proportion dans $\mathcal{P}([\![1\,;n]\!])$ des parties de $[\![1\,;n]\!]$ contenant deux entiers consécutifs est inférieure ou égale à 80 %.

45 **Somme des cubes des n premiers entiers naturels**

1°) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_0^3+x_1^3+\ldots+x_n^3=(x_0+x_1+\ldots+x_n)^2$.

a) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=x_0+x_1+\ldots+x_n$; démontrer que : $x_{n+1}^3=2S_n x_{n+1}+x_{n+1}^2$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que :
$x_0+x_1+\ldots+x_n=\dfrac{m(m+1)}{2}$.

c) Déterminer la suite (x_n) sachant que $x_0=0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $x_n>0$.

2°) Pour n et p entiers naturels non nuls, on pose : $S_{n,\,p}=1^p+2^p+\ldots+n^p$.
On se propose de déterminer l'ensemble E des $p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n,\,p}$ soit le carré d'un entier naturel.

a) Vérifier que $p=3$ est un élément de E.

b) Y a-t-il d'autres éléments dans E ? (Raisonner sur $S_{2,p}$.)

Point de départ :

1°) b) Effectuer une récurrence, en distinguant deux cas suivant que x_{n+1} est nul ou non.

c) Démontrer que la seule solution est $x_n=n$.

2°) b) En supposant qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $S_{2,\,n}=q^2$, démontrer que p est nécessairement égal à 3.

46 Pour tout entier naturel n non nul, on note s_n la somme des chiffres dans la représentation de n en base dix.

1°) Démontrer que $s_n \leqslant 9(1+\log_{10} n)$.

2°) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

47 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par ses premiers termes $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Démontrer que $\forall (n\,;\,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p+k} = u_{p+2n}$.

48 On considère une suite (a_n) de réels et, pour tout entier naturel *k*, on pose $b_k = \displaystyle\sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} a_l$.

Démontrer alors la formule de Pascal : pour tout entier naturel *n* on a $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$.

Indication : Dans l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$, remplacer b_k par sa valeur donnée plus haut puis simplifier l'expression obtenue pour retrouver a_n.

49 On considère un alphabet ayant *n* lettres, *n* étant un entier naturel non nul.
On note M_n le nombre de mots ayant au plus une fois chacune des lettres.

1°) Démontrer que $\mathrm{M}_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}$.

2°) Démontrer que $1 + \mathrm{M}_n = \mathrm{E}(n!\mathrm{e})$.

50 Un groupe de *n* personnes est invité à un repas, *n* étant un entier naturel non nul.
1°) On dispose d'une rangée de *n* chaises. Combien existe-t-il de dispositions différentes pour placer les invités ?
2°) On dispose maintenant d'une table ronde avec *n* chaises. Sachant que deux dispositions sont identiques si chaque invité à les mêmes voisins, combien existe-t-il de dispositions différents pour placer les invités ?

51 Soit E un ensemble de cardinal *np*.
Combien y a-t-il de partitions de E en *n* parties de *p* éléments ?

51 **Problème**

Question préliminaire

Soit Ω un ensemble fini.

Calculer $\displaystyle\sum_{H \in \mathcal{P}(\Omega)} (-1)^{\text{card}\, H}$.

Soit *E* un ensemble fini non vide de cardinal *n* et *f* une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{R}$.

Partie A

Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on pose $g(A) = \displaystyle\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}(E) \\ A \subset P}} f(P)$.

1°) Démontrer que $f(\varnothing) = \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{card}\, P} g(P)$.

2°) Application :
Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathrm{F}(A)$ l'ensemble des bijections de *E* dont l'ensemble des points fixes est *A* et l'on pose $f(A) = \text{card}\, \mathrm{F}(A)$.
Démontrer que si $\text{card}\, A = k$, $g(A) = (n-k)!$.

En déduire que le nombre de permutations sans points fixes de *E* est égal à $a_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Partie B

Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on pose $h(A) = \displaystyle\sum_{\substack{P \in \mathcal{P}(E) \\ P \subset A}} f(P)$.

1°) Démontrer que $f(E) = \displaystyle\sum_{P \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{card}\, \overline{P}} h(P)$. On précise que $\overline{P} = \complement_E P$ (complémentaire de *P* dans *E*).

2°) Soit *F* un ensemble fini de cardinal *p* tel que $n \geqslant p \geqslant 1$.
On désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications de *E* dans *F*.
Pour tout $B \subset F$, on note $\mathrm{G}(B) = \{\varphi \in \mathcal{A} \,/\, \varphi(E) = B\}$ et l'on pose $h(B) = \text{card}\, \mathrm{G}(B)$.
Démontrer que, si $\text{card}\, B = k$, alors $h(B) = k^n$.
En déduire que si $S_{n,\,p}$ désigne le nombre des applications surjectives de *E* dans *F*, on a :

$$S_{n,\,p} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \mathrm{C}_p^k k^n.$$

Réponses

$\boxed{1}$

$\boxed{2}$ 2°) a) $A=\left\{f(n),\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{N}$ donc elle admet un minimum.

$\boxed{5}$ Prise de décision

1ère solution :

Majorité relative :

• On dénombre les cas pour lesquels le projet est validé.
On fait un tableau.

Pour	Contre	Abstention	Nombre de possibilités
1	0	4	5
2	0	3	20
2	1	2	$\binom{5}{2}\times\binom{3}{1}=30$
3	0	2	$\binom{5}{3}=10$
3	1	1	$\binom{5}{3}\times\binom{2}{1}=20$
3	2	0	$\binom{5}{3}=10$
4	0	1	$\binom{5}{4}=5$
4	1	0	5
5	0	0	1

• On dénombre les cas pour lesquels le projet n'est pas validé.
On inverse les colonnes pour et contre.
Même résultat.

$$P(\text{«une décision est prise à la majorité relative »})=\frac{192}{243}=\frac{64}{81}=\left(\frac{8}{9}\right)^2$$

Majorité absolue

On raye certaines cases : les 1 – 0 // 2 – 0 // 2 – 1.

$192-110=82$

$$P(\text{«une décision est prise à la majorité absolue »})=\frac{82}{243}$$

2e solution :

Majorité relative :

On a trois cas où la décision n'est pas prise :
1 P – 1 C – 3 A
2 P – 2 C – 1 A
0 P – 0 C – 5 A

$$\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}\times1+\binom{5}{2}\times\binom{3}{2}+1=5\times4\times1+10\times3+1$$
$$=51$$

$$P(\text{«une décision est prise à la majorité relative »})=1-\frac{51}{243}=\frac{192}{243}$$

Majorité absolue : solution de François Morel le 21 novembre 2011 (François Morel MPSI B)

Il y a une majorité absolue si $\text{P}\geqslant3$ et $\text{C}\geqslant3$ (en notant P le nombre de votes « pour » et C le nombre de « contre »).

Pour $\text{P}\geqslant3$

P	C	A	Nombre de possibilités
3	2	0	$\binom{5}{3}\times\binom{2}{2}\times1=20$
3	2	1	$\binom{5}{3}\times1\times1=10$
3	0	2	10
4	1	0	5
4	0	1	5
5	0	0	1

41 possibilités en tout

Idem pour $\text{C}\geqslant3$

$$P(\text{«une décision est prise à la majorité absolue »})=\frac{82}{243}$$

Lory 23-11-2012

Pour	Contre	Abstention	Possibilités
5	0	0	1
0	5	0	1
4	1	0	5
1	4	0	5
3	2	0	10
3	0	2	10
3	1	1	20
2	3	0	10
1	3	1	20
0	3	2	10
0	4	1	5
1	4	0	5

102 possibilités

D'où $p=\dfrac{102}{243}=\dfrac{34}{81}$

majorité relative

nombre d'abstentions < nombre de pour et nombre de contre

Lory m'a dit :
« 2 P – 2 A – 1 C » pas de décision

5 C – 0 A
Majorité relative : préciser les conditions de prise de décision.

$\boxed{7}$ 1°) 24 ; 2°) 6 : 3°) $15=24-6\times 2+4\times 1-1$; 9.

$\boxed{7}$ On range les entiers 1, 2, 3, 4…
Autre version :

$\boxed{\text{B}}$ Réponses :

- au moins un entier est à sa place : 15
- aucun entier n'est à sa place : 9

$\boxed{8}$ 1°) $3^4=81$ 2°) 45 ; 36

$\boxed{10}$ 1°) C_{n+1}^{p+1}

$\boxed{17}$

1°) $\text{card }\Omega=10^3$

2°) $\text{card A}=10^3-5^3$

3°) $\text{card B}=3\times 5^3$

4°) $\text{card C}=10^3-4^3$ (à vérifier)

5°) Calculer l'ensemble de l'ensemble D des triplets d'éléments de E contenant exactement un nombre impair et un carré parfait.

$\boxed{18}$ Il est immédiat que $\text{Id}_{\mathbb{N}}$ convient. Le seul problème est de montrer que c'est la seule solution.

Commençons par chercher des informations sur une fonction solution.
Sans l'indication fournie, le sujet deviendrait bien difficile !
Un objectif raisonnable serait que *f* est croissante.

Soit *f* une application qui répond au problème.
On peut espérer montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}$, le sous-ensemble M_p est stable par *f*.
Il est immédiat que $\text{M}_0=\mathbb{N}$ est stable par *f*.

Supposons que M_p soit stable par *f* et considérons $k\geqslant p+1$.
Avec $k\geqslant p$, on a $f(k)\geqslant p$ par hypothèse de récurrence.
L'objectif est de prouver que l'on a $f(k)\geqslant p+1$, c'est-à-dire que $f(k)\neq p$.
À cet effet, supposons que $f(k)=p$.
Avec la propriété (1), il vient $f\circ f(k-1)<f(k)$, donc $f\circ f(k-1)<p$ (*).
Or on a $k-1\geqslant p$, donc $f(k-1)\geqslant p$ par stabilité de M_p.
Un nouvel appel à la stabilité de M_p donne $f\circ f(k-1)\geqslant p$, ce qui est contradictoire avec (*) et on en déduit que $f(k)\neq p$, donc $f(k)\geqslant p+1$.
On a ainsi prouvé que la stabilité de M_p par *f* implique celle de M_{p+1}.

En première conclusion, tous les sous-ensembles M_p sont stables par *f*.

Gardons à l'esprit qu'un objectif raisonnable est la croissance de *f*.
La stabilité de M_p par *f* donne en particulier $f(p)\geqslant p$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
On a donc aussi $f\big(f(p)\big)\geqslant f(p)$.
Avec $f(p+1)>f\big(f(p)\big)$, il vient $f(p+1)>f(p)$ et la stricte croissance de *f* en découle.

La solution connue $\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante. On vient de voir qu'il en est de même pour toute solution f.

On arrive au bout.

Il reste à prouver que $f(p)=p$ pour tout p.

On a déjà établi que $f(p)\geqslant p$.

Pour prouver que $f(p)=p$, il suffit donc de démontrer qu'on a $f(p)<p+1$.

Si on avait $p+1\leqslant f(p)$, la croissance de f donnerait $f(p+1)<f\left(f(p)\right)$ ce qui est en contradiction avec (1).

En conclusion, f est l'application identité sur $\mathbb{N}$.

Solution de Thomas Le Héricy (novembre 2010) :

2°) On rappelle que $\forall n\in\mathbb{N}\quad f(n)\geqslant n$ et $\forall n\geqslant p\quad f(n)\geqslant p$.

On démontre que $\forall n>p\quad f(n+1)>f\left(f(p)\right)\geqslant f(p)$

$$f(n)>f(p)\Rightarrow\quad f(n+1)>f\left(f(n)\right)\geqslant f(n)>f(p)$$

D'où $n>p\Rightarrow f(n)>f(p)$

3°) On a : $\forall n\in\mathbb{N}\quad f(n)\geqslant n$

$f(n+1)\geqslant n+1$

$f(n+1)>f\left(f(n)\right)$

Si $f(n)\geqslant n+1$, alors $f\left(f(n)\right)\geqslant f(n+1)$ absurde

D'où $\forall n\in\mathbb{N}\quad f(n)=n$.

$\boxed{15}$ 2°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{-1}(n)\leqslant n$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{-1}(n)=n$.

$\boxed{16}$ Note : au départ les trois questions de cet exercice étaient des exercices séparés.
Je les ai ensuite rassemblé en un seul.

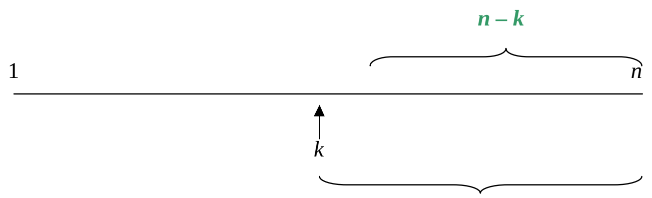
Par exemple le 2°) était rédigé ainsi.

Soit n et p deux entiers naturels quelconques tels que $p<n$.

Démontrer que l'on a : $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\,\mathrm{C}_k^p=(-1)^p\,\mathrm{C}_{n-1}^p$.

Le 1°) et le 3°) étaient rédigés pareils.

$\boxed{19}$ 1°) a) min A $=k$



$n-k+1\geqslant p$

$1\leqslant k\leqslant n+1-p$

$\mathcal{P}_{n-k}(\{k+1,\ldots,n\})$

$\boxed{23}$ On peut considérer l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathbb{N}$ qui à toute partie A de E associe la somme de ses éléments (on peut écrire $\sum_{x\in A}x$).

Le nombre de parties de E est égal à $2^{10}=1024$.
La somme des éléments d'une partie A de E est comprise entre 10 et 1000.
Le nombre de résultats possibles est inférieur strictement au nombre de parties de E. L'application f n'est donc pas injective. Deux parties ont donc la même image par f.

On peut écrire $f\left(P(E)\right)\subset\{10;\ldots;1000\}$.

$\boxed{26}$ Périodique de période 20 je crois. Donner les résultats pour n allant de 0 à 20 ou plus.

$\boxed{27}$ 1°) $6^6\times 12^6=$ 139 314 069 504 ; 2°) $4^4\times 12^8=$ 110 075 314 176
3°) $2^2\times 4^2\times 6^4\times 12^4=$ 1 719 926 784

Reprise avec les bijections : 1°) $(6!)^2$; 2°) $4!\times 8!$; 3°) $2!\times 2!\times 4!\times 4!$

$\boxed{28}$ 2°) Pour $\sigma\in S_5$, on pose $n_\sigma=10^4\times\sigma(1)+10^3\times\sigma(2)+10^2\times\sigma(3)+10\times\sigma(4)+\sigma(5)$.

On a : $n_\sigma+n_{\sigma'}=666\,666$.

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Bij}(E)}\left(n_\sigma+n_{\sigma'}\right)=120\times 66\,666$$

Or $\sum_{\sigma\in\mathrm{Bij}(E)}n_\sigma=\sum_{\sigma'\in\mathrm{Bij}(E)}n_{\sigma'}$.

Donc $\sum_{\sigma\in\mathrm{Bij}(E)}n_\sigma=\dfrac{120\times 66\,666}{2}=60\times 66\,666=3\,999\,960$ (résultat demandé).

$\boxed{29}$ 2^{n-m}

$\boxed{30}$ p boules dans deux tiroirs
2^p possibilités auxquelles on retire les deux possibilités où les p boules sont dans le même tiroir.

$N=2^p-2$

$\boxed{33}$ n^{p-1}

$Z=\{\left(z_1,z_2,\ldots,z_p\right)\in \mathrm{U}\times\mathrm{U}\ldots\mathrm{U}\ /\ z_1z_2\ldots z_p=1\}$

$$\underbrace{\mathrm{U}\times\mathrm{U}\ldots\mathrm{U}}_{p-1}\to Z$$

$$\left(z_1,z_2,\ldots,z_{p-1}\right)\mapsto\left(z_1,z_2,\ldots,z_{p-1},\frac{1}{z_1z_2\ldots z_{p-1}}\right)$$

$\boxed{34}$ $\dbinom{n}{p}\times(p-2)!$

On choisit une partie à p éléments.
On réalise un p-uplet en mettant le plus petit en première position et le plus grand en dernière position.
On peut remplir les cases 2 à $p-1$.

$\boxed{35}$ 1°) On utilise l'événement contraire de A.
Pour cela, on emploi la méthode des cases.
Om 6^4 possibilités au total.
Il y a $6\times5\times4\times3$ possibilités pour l'événement contraire de A.

↑	↑	↑	↑
6	5	4	3

$$P(\mathrm{A})=1-\frac{6\times5\times4\times3}{6^4}=1-\frac{5\times4\times3}{6^3}=1-\frac{5\times2\times\cancel{6}}{6^2\times\cancel{6}}=1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}=0{,}72\underline{2}\ldots$$

2°) On utilise l'événement contraire de B.
L'événement contraire de B est la réunion disjointe des événements suivants :
« Le suspect N°1 n'est désigné par aucun témoin ». Il y a 5^4 possibilités.
« Le suspect N°1 est désigné par une seul témoin ». Il y a 4×5^3 possibilités.

$$P(\mathrm{B})=1-\frac{5^4+4\times5^3}{6^4}=\frac{19}{144}=0{,}13194\ldots$$

Sur une feuille j'avais noté :

$$1-\frac{5^4+4\times5^3}{6^4}=1-\frac{625+500}{1296}=1-\frac{1125}{1296}=\frac{171}{1296}=0{,}13194\underline{4}\ldots$$

$\boxed{36}$ **Trous de Kaplanky**
1°) On cherche le nombre de suites à 2 termes dont les éléments sont compris entre 1 et 6 et qui sont strictement croissantes.
On a :

1 ; 2	2 ; 3	3 ; 4	4 ; 5	5 ; 6
1 ; 3	2 ; 4	3 ; 5	4 ; 6	
1 ; 4	2 ; 5	3 ; 6		
1 ; 5	2 ; 6			
1 ; 6				

On cherche les suites telles que $x_2-x_1<2$ (on a : $1\leqslant k\leqslant 1$ donc $k=1$).
On a alors $\operatorname{card}\mathrm{E}_2=6$.

2°) Démontrons que la suite $(y_1, y_2,..., y_p)$ est strictement croissante.

$y_k=x_k-(k-1)\mathrm{L}$

$y_{k+1}=x_{k+1}-k\mathrm{L}$

D'où : $y_{k+1}-y_k=x_{k+1}-x_k-k\mathrm{L}+(k-1)\mathrm{L}$ ce qui donne $y_{k+1}-y_k=x_{k+1}-x_k-\mathrm{L}$.
Or on sait que $x_{k+1}-x_k>\mathrm{L}$.
Donc $y_{k+1}-y_k>0$ et la suite $(y_1, y_2,..., y_p)$ est strictement croissante.
De plus, on sait que les x_k appartiennent à {1 ; … ; n}.
Donc pour x_p, on aura $x_p=n$.

Soit le dernier terme de suite $y_p=n-(p-1)\mathrm{L}$.
De même, pour le premier, on a : $y_1=x_1$.
Or $x_1=1$ soit $y_1=1$.

3°) On admet que $\mathrm{E_L}$ est en bijection avec l'ensemble des suites strictement croissantes à p termes d'entiers compris entre 1 et $n-(p-1)\mathrm{L}$.

On cherche alors le nombre de combinaisons de p termes que l'on peut faire dans un ensemble de cardinal $n-(p-1)\mathrm{L}$. On obtient le nombre de suites et donc le cardinal de l'ensemble de ces suites.
Cet ensemble est en bijection avec $\mathrm{E_L}$. Leurs cardinaux sont donc égaux.

On a donc $\operatorname{card}\mathrm{E_L}=\dbinom{n-(p-1)\mathrm{L}}{p}$.

4°) **Applications**
a) Au loto, on appelle tirage une liste strictement croissante de 6 éléments de l'ensemble {1 ; 2 ; … ; 49}.
Les tirages se font au hasard.
Quelle est la probabilité pour que dans un tirage il y ait au moins deux entiers consécutifs ?

$x_2-x_1>1$
$x_3-x_2>1$
…

$x_6-x_5>1$

Il s'agit de $\mathrm{E_1}$.

On applique le résultat précédent avec : $n=49$ et $\mathrm{L}=1$.

$\operatorname{card}\mathrm{E_1}=$

b) Quel est le nombre de « mots » de longueur n ($n>1$) composés de lettres appartenant à $\{a\,;b\}$ pour lesquels deux lettres a ne se suivent pas ?
Calculer ce nombre pour $n=10$.

$\boxed{37}$
1°) $\varphi_{\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}}=\varphi_\mathrm{A}+\varphi_\mathrm{B}-2\varphi_\mathrm{A}\varphi_\mathrm{B}$
2°)

$$2S=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\alpha_i\alpha_j t_{i,\,j}$$

$$2S=\sum_{x\in E}\varphi(x) \text{ avec } \varphi=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\alpha_i\alpha_j\left(1_{A_i}+1_{A_j}-21_{A_i}1_{A_j}\right)$$

$$\varphi=\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}\alpha_i\alpha_j\left(1_{A_i}+1_{A_j}-21_{A_i}1_{A_j}\right)$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j 1_{A_j}\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}\right)^2 \quad \text{(on utilise l'hypothèse } \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1\text{)}$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}\right)-2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}\right)^2$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}\right)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}\right)$$

$$\forall x\in\mathbb{Z}\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i 1_{A_i}(x)\in\mathbb{Z}$$

Or $\forall k\in\mathbb{Z}\quad k(1-k)\leqslant 0$ d'où le résultat.

38

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k}{k+1}$$

1ère méthode : On a $(k+1)C_{n+1}^{k+1}=(n+1)C_n^k$

$$S=\frac{2^{n+1}}{n+1}$$

2e méthode : intégrer $(x+1)^n$

39

$$S_{n+1}=S_n+\frac{C_n^0}{1}-\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}C_n^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^n C_{n+1}^n}{n+1}$$

$$kC_{n+1}^k=(n+1)C_n^{k-1}$$

$$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0-C_{n+1}^1+\ldots+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}$$

Autre méthode : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(1-t)^k=\frac{1-(1-t)^n}{t}$

42 « Remplir une grille de loto »

C_{44}^6 (n'_i de 0 à 43)

47 Si k est le nombre de 9 finaux pour n, alors $s_{n+1}=s_n-9k+1$ et en particulier, $0<\frac{s_{n+1}}{s_n}\leqslant 2$, le majorant étant parfois atteint, et le minorant n'étant pas améliorable (prendre $n=10^k-1$) : c'est la borne inférieure.

50 1°) $n!$; 2°) $(n-1)!$

Questions de cours

1 **Principe du berger**

E : ensemble fini de bestioles.
Bestiole $\to$ nombre de pattes

2 Donner une formule donnant le développement de $(a_1+b_1)...(a_n+b_n)$ à l'aide des parties de $\{1\,;\,2\,;\,\ldots\,;n\}$ (on pourra poser pour une partie A de $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$: $\Pi_{\text{A}}=\prod_{i\in \text{A}} a_i \times \prod_{i\notin \text{A}} b_i$).

Donner le nombre de termes de cette somme.
Application à la démonstration directe de la formule du binôme de Newton.

3 Formule de Pascal. Donner une démonstration par le calcul et une démonstration sans calcul.

4 Nombre de parties d'un ensemble fini.

5 Nombre d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.
Nombre d'applications injectives d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.

6 Donner la définition d'un ensemble dénombrable. Donner un exemple d'ensemble dénombrable et un exemple d'ensemble non dénombrable.

7 Démontrer le principe de récurrence :
Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$ telle que $0\in\mathbb{N}$ et $\forall n\in\mathbb{N}\ \ n\in \text{A} \Rightarrow n+1\in \text{A}$. Alors $\text{A}=\mathbb{N}$.

8 **Une autre démonstration de la formule de Pascal (sans calcul)**

Soit n et p deux entiers naturels quelconques tels que $n>p$.

1°) Rappeler la formule de Pascal.
2°) Soit E un ensemble (abstrait) de cardinal $n+1$.
Soit a un élément fixé de E.
Exprimer sous forme de coefficients du binôme le nombre de parties de E à $p+1$ éléments :

- total ;
- ne contenant pas a (on pourra raisonner par rapport à l'ensemble $\text{E}\backslash\{a\}$; pour constituer une telle partie, on choisit $p+1$ éléments dans $\text{E}\backslash\{a\}$) ;
- contenant a (pour constituer une telle partie, on prend a et on choisit p éléments dans $\text{E}\backslash\{a\}$).

En déduire la formule de Pascal.

N.B. : On peut retenir cette démonstration ensembliste de la formule de Pascal.

9 **Principe de Dirichlet (ou des tiroirs)**
Relier ce principe à l'injectivité.

10 Soit n un entier naturel fixé supérieur ou égal à 1.
Déterminer le nombre de suites strictement croissantes de p éléments ($1\leqslant p\leqslant n$) pris dans l'ensemble $\{1\,;2\,;\ldots\,;n\}$.

Réponses des questions de cours :

2 **Formule du binôme de Newton**

$P=(a_1+b_1)...(a_n+b_n)$

Pour toute partie A de $\{1\,;\,2\,;\,\ldots\,;n\}$ de cardinal n, on pose $\Pi_{\text{A}}=\prod_{i\in \text{A}} a_i \times \prod_{i\notin \text{A}} b_i$.

$P=\sum_{\text{A}\in \mathcal{P}(\{1\,;\ldots\,;\,n\})} \Pi_{\text{A}}$ (on a une somme de 2^n termes)

(on peut aussi poser $\Pi_{\text{A}}=\prod_{i=1}^{i=n} (\rho_{\text{A}})_i$ avec $(\rho_{\text{A}})_i=\left|\begin{array}{l} a_i \text{ si } i\in \text{A} \\ b_i \text{ si } i\notin \text{A}\end{array}\right.$)

On considère les a_i égaux entre eux et les b_i égaux entre eux.

$\Pi_{\text{A}}=a^{\text{card A}}\ b^{n-\text{card A}}$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{\text{A}} a^{\text{card A}}\ b^{n-\text{card A}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\text{A}\in \mathcal{P}_k(\{1;\ldots;n\})} a^{\text{card A}}\ b^{n-\text{card A}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\text{card A}}\ b^{n-\text{card A}}\end{aligned}$$

8 **Une autre démonstration de la formule de Pascal (sans calcul)**

1°) Rappeler la formule de Pascal.

$\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p+1}+\binom{n}{p}$

2°) Soit E un ensemble (abstrait) de cardinal $n+1$.
Soit a un élément fixé de E.

Le nombre de parties de E à $p+1$ éléments (c'est-à-dire card $\mathsf{P}_{p+1}(\text{E})$) est égal à $\binom{n+1}{p+1}$:

On considère :

$\mathsf{U}=\{\text{A}\in \mathsf{P}_{p+1}(\text{E})\,/\,a\in \text{A}\}$

$\mathsf{V}=\{\text{A}\in \mathsf{P}_{p+1}(\text{E})\,/\,a\notin \text{A}\}$