TS — Exercices sur le logarithme népérien (2)

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{5}$, on demande de déterminer l'ensemble de définition de *f*, de déterminer un ensemble sur lequel *f* est dérivable et de calculer la dérivée de *f*.

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$ $\boxed{2}$ $f : x \mapsto \ln(\ln x)$ $\boxed{3}$ $f : x \mapsto \ln\left(\mathrm{e}^{3x}+1\right)$ $\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$ $\boxed{5}$ $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$

Dans les exercices $\boxed{6}$ à $\boxed{9}$, on demande de déterminer la limite de *f* en + ∞.

$\boxed{6}$ $f : x \mapsto x^2 - \ln x$ $\boxed{7}$ $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2+x+3}$ (on notera que *f* n'est pas une fonction rationnelle)

$\boxed{8}$ $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$ $\boxed{9}$ $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ (on posera $x = X^2$)

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Déterminer l'ensemble de définition de *f* et les limites aux bornes.

$\boxed{11}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier la continuité de *f* à droite en 0.

2°) a) Justifier que *f* est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in]0\,;+\infty[$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$. La fonction *f* est-elle dérivable à droite en 0 ?

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ?

Déduire de l'étude précédente le domaine de dérivabilité de *f*.

3°) Étudier les variations de *f* sur $\mathbb{R}^+$ et la limite de *f* en + ∞.

Effectuer un tableau récapitulatif avec le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.

On prendra garde :

- qu'il doit y avoir une <u>double barre</u> sous le 0 sur la ligne du signe de $f'(x)$ mais pas sur la dernière ligne puisque *f* est définie en 0 par $f(0) = 0$ (d'après l'énoncé, $f(0)$ existe et est égal à 0).
- qu'il doit y avoir la valeur exacte de l'extremum.

4°) Étude de la branche infinie de $\mathcal{C}$

Étudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique dont on précisera la direction.

5°) Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 1 ?

6°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$, la demi-tangente verticale, la tangente horizontale et la tangente au point A.

Prendre une page complète et prendre 2 cm pour unité graphique.

On donne $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}4$.

Vérifier le tracé sur la calculatrice ; bien visualiser la demi-tangente verticale à $\mathcal{C}$ au point O.

$\boxed{12}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Étudier *f* (on détaillera le signe de $f'(x)$). Préciser les asymptotes à $\mathcal{C}$.

Calculer l'extremum de *f*.

On laissera la valeur exacte de l'extremum dans le tableau de variations.

2°) Tracer $\mathcal{C}$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la tangente horizontale ainsi que la tangente *T* au point A d'abscisse 1.

3°) Déterminer une équation de la tangente T' à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$.

Que peut-on dire de cette tangente ?

4°) Étudier la convexité de *f* et déterminer les points d'inflexion éventuels de $\mathcal{C}$.

$\boxed{13}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{5-x}{1+x}\right)$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.

2°) Démontrer que *f* est dérivable sur son ensemble de définition et calculer $f'(x)$.

3°) Dresser le tableau de variations de *f*.

4°) Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?

5°) Préciser les coordonnées du point A où $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées et du point B où $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses.

6°) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$											

Tracer $\mathcal{C}$ et ses asymptotes en prenant 1 cm pour unité graphique.

Tracer les tangentes en A et B. On admettra que B est un point d'inflexion pour la courbe $\mathcal{C}$.

7°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point B pour centre de symétrie.

$\boxed{14}$ 1°) Démontrer que pour tout réel x strictement positif on a : $\ln(1+x) < x$.

2°) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e}$.

Corrigé

Qu'appelle-t-on **ensemble de dérivation** (ou de dérivabilité) d'une fonction *f* ?

C'est l'ensemble des réels x en lesquels *f* est dérivable.
L'ensemble de dérivation est inclus dans l'ensemble de définition.
Il n'est pas forcément égal à l'ensemble de définition (cf. fonction valeur absolue, fonction racine carrée).

Dans les exercices, on demande de donner un ensemble sur lequel *f* est dérivable.
Cet ensemble est fourni en appliquant les théorèmes d'opérations sur les dérivées.

$\boxed{1}$ $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-2} > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

On fait un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x-2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{x+1}{x-2}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

Rappel :

Attention à bien mettre la double barre au niveau du 2 sur la dernière ligne du tableau de signe.

$\mathcal{D}_f =]-\infty\,;-1[\,\bigcup\,]2\,;+\infty[$

Lorsque l'on cherche l'ensemble de définition d'une fonction, on ne commence pas par transformer l'expression la fonction (en particulier, ici on ne doit pas commencer par transformer $f(x)$ car on n'obtiendrait pas le même ensemble de définition ; on ne commence pas par écrire $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-2)$).

On pose $u(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ et $v(x) = \ln x$.

u est dérivable sur $]-\infty\,;-1[\,\bigcup\,]2\,;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ (le « à valeurs dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ » est déterminé par rapport au tableau de signes).
v est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Or $f = v \circ u$ donc *f* est dérivable sur $]-\infty\,;-1[\,\bigcup\,]2\,;+\infty[$.

Schéma :

$$\begin{tikzcd}]-\infty;-1[\bigcup]2;+\infty[\arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] &]0;+\infty[\arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

N.B. : Dans un schéma de dérivation, à droite, on a toujours $\mathbb{R}$.

On utilise directement la formule de dérivée logarithmique plutôt que la formule générale de dérivée d'une composée.

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = \dfrac{\dfrac{(x-2) - 1 \times (x+1)}{(x-2)^2}}{\dfrac{x+1}{x-2}}$

$f'(x) = -\dfrac{3}{(x-2)^2} \times \dfrac{x-2}{x+1}$

$$\boxed{f'(x) = -\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}}$$

Pour calculer la dérivée de *f*, on doit faire une « sous-dérivée ».
Il est conseillé de calculer la dérivée de u à part plutôt que d'incorporer les calculs dans la dérivée.

$\boxed{2}$ $f : x \mapsto \ln(\ln x)$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases}$

si et seulement si $x > 1$

$\mathcal{D}_f =]1\,;+\infty[$

On pose $u(x) = \ln x$.

u est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
u est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Or $f = u \circ u$ donc f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$.

Schéma :

$$\begin{tikzcd}]1;+\infty[\arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "u \circ u"'] &]0\,;+\infty[\arrow[r, "u"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$= \frac{1}{x \ln x}$$

$\boxed{3}$ $f : x \mapsto \ln\left(e^{3x}+1\right)$

$f(x)$ existe si et seulement si $e^{3x}+1>0$ (toujours vrai)

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

On pose $u(x) = e^{3x}+1$ et $v(x) = \ln x$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
v est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Schéma :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] &]0\,;+\infty[\arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}$$

$\boxed{4}$ $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ d'après les règles d'opérations sur les fonctions dérivables (f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$, celle du dénominateur ne s'annulant pas ; la dérivabilité de la fonction du numérateur se justifie grâce à la propriété sur la dérivée d'une composée).

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1} \times x - \ln\left(x^2+1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^2}{x^2+1} - \ln\left(x^2+1\right)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{2x^2-\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1}}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2-\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)}{x^2+1} \times \frac{1}{x^2} \quad \text{(ligne facultative)}$$

$$= \frac{2x^2-\left(x^2+1\right)\ln\left(x^2+1\right)}{x^2\left(x^2+1\right)}$$

Pour calculer la dérivée de f,
- on applique la formule de dérivation d'un quotient ;
- on doit faire une « sous-dérivée » (c'est-à-dire que l'on doit faire une dérivée à l'intérieur de la dérivée ; ce n'est pas vraiment une dérivée de composée).

$\boxed{5}$ $\boldsymbol{f : x \mapsto \sqrt{\ln x}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \geqslant 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \geqslant \ln 1 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

si et seulement si $x \geqslant 1$

$D_f = [1\,;+\infty[$

On pose $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Schéma pour les ensembles de définition :

$$\begin{tikzcd} {[1\,;+\infty[} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & {[0\,;+\infty[} \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Schéma pour les ensembles de dérivabilité :

$$\begin{tikzcd} {]1\,;+\infty[} \arrow[r, "u"] \arrow[rr, bend right, "v \circ u"'] & {]0\,;+\infty[} \arrow[r, "v"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

u est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ à valeurs dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
v est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Or $f = v \circ u$ donc on peut dire que f est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ (théorème sur la dérivée d'une fonction composée).

$$\forall x \in]1\,;+\infty[\quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}$$

$$= \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

On applique la formule de dérivation : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

N.B. : On devrait faire une étude spéciale en 1 pour savoir si f est dérivable à droite en 1.

6 $\boldsymbol{f : x \mapsto x^2 - \ln x}$

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{array}\right\}$$ donc, en $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\infty - \infty$ ».

$$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x^2}\right)$$

On utilise $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ (limite de référence ; théorème des croissances comparées).

On en déduit que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Variante :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f(x) = x\left(x - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \end{array}\right\}$$ donc par limite d'une différence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty \end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

7 $\boldsymbol{f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2 + x + 3}}$

Déterminons la limite de f en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2 + x + 3\right) = +\infty \end{array}\right\}$$ donc en $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1 \end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

8 $f : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2 + 1\right)}{x}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 + 1\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \end{array}\right\}$$ donc en $+\infty$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f(x) = \frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}$$
$$= \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$
$$= \frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

(on notera bien que l'on prend $x \in \mathbb{R}_+^*$ pour écrire cette égalité ; en effet pour pouvoir écrire $\ln x^2 = 2\ln x$ on doit avoir $x > 0$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$ (théorème de croissance comparée)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

Par limite d'une somme on obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{9}$ **$f : x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{x}$**

$f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$

$\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc, en } +\infty\text{, on rencontre une FI du type « } \frac{\infty}{\infty} \text{ ».}$$

On pose $x = X^2$ avec $X > 0$ (donc $X = \sqrt{x}$).

$(x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to +\infty)$

$$f(x) = \frac{\left[\ln(X^2)\right]^2}{X^2}$$
$$= \left(\frac{2\ln X}{X}\right)^2$$
$$= 4\left(\frac{\ln X}{X}\right)^2$$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ (théorème de croissance comparée)

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\boxed{10}$ **$f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$**

Ensemble de définition :

$f(x)$ existe si et seulement si $x > 0$

$\mathcal{D}_f =]0\,;+\infty[$ (ou $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$)

Limite en 0^+ :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient on obtient } \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty.$$

Limite en $+\infty$:

Pour la limite en $+\infty$, on pose $X = \sqrt{x}$.

$$\begin{array}{c} \sqrt{x} \to +\infty \\ \downarrow \\ (x \to +\infty) \Leftrightarrow (X \to +\infty) \end{array}$$

$$f(x) = \frac{\ln(X^2)}{X}$$
$$= \frac{2\ln X}{X}$$

On a alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{\ln(X^2)}{X} = 2\frac{\ln X}{X}$.

On sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ (théorème de croissance comparée)

Donc on en déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

$\boxed{11}$ **f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$**

$f(x) = x\ln x$ si $x > 0$

$f(0) = 0$

N.B. : f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ car on a donné une valeur à l'image de 0.

1°) **Étudions la continuité de f à droite en 0.**

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$ (limite de référence)

Or $f(0)=0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$.

On en déduit que la fonction f est continue à droite en 0.

Remarque : On ne dit pas f est continue à droite en 0^+.

2°) a) **Justifions que f est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et calculons $f'(x)$ pour $x\in\left]0\,;+\infty\right[$.**

On pose $u(x)=x$ et $v(x)=\ln x$.

u et v sont dérivables sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=u(x)v(x)$ donc f est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ (règle sur les produits de fonctions dérivables).

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\qquad f'(x)=\ln x+\frac{x}{x}$$

$$=\ln x+1$$

b) **Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.**

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ donc la fonction f n'est pas dérivable à droite en 0.

Remarque : On ne dit pas f est dérivable à droite en 0^+.

Comme la fonction f est continue à droite en 0, on peut dire que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 (cette demi-tangente est la demi-droite $[\mathrm{O}y')$).

$\mathcal{C}$ admet une demi-tangente verticale en O.

3°) **Étudions les variations de f sur $\mathbb{R}^+$ et la limite de f en $+\infty$.**

• Étude du signe de $f'(x)$

Pour étudier le signe de 1 + ln x, on résout deux inéquations et une équation.

$\ln x+1<0$ (1)	$\ln x+1=0$ (2)	$\ln x+1>0$ (3)
(1) $\Leftrightarrow \ln x<-1$ $\Leftrightarrow x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	(2) $\Leftrightarrow \ln x=-1$ $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$	(3) $\Leftrightarrow \ln x>-1$ $\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

• Variations de f

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	0	↘	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	↗	$+\infty$

On a une double barre car la fonction f n'est pas dérivable en 0.
On sait d'après l'énoncé que f est définie en 0 et que $f(0)=0$.

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

f est strictement décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$; f est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;+\infty\right[$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4°) **Branche infinie**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x\ln x}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Oy) (tournée vers le haut).

Explication sur la branche parabolique à redonner.
Notamment relier avec la droite (OM).

5°) **Coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1**

On calculer $f'(1)$.
$f'(1)=1$ donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est égal à 1.

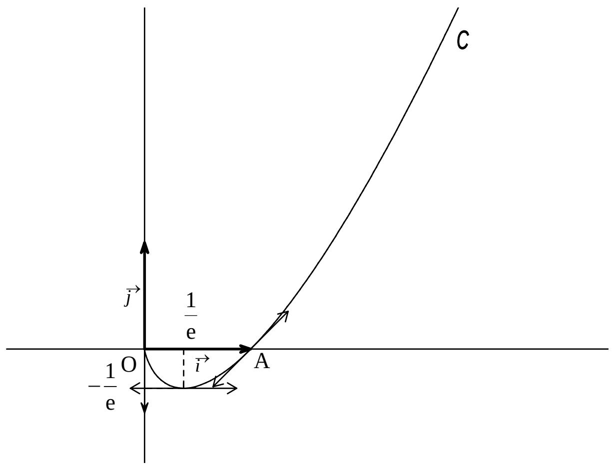
6°) **Tracé de $\mathcal{C}$ et de quelques tangentes**

On trace la tangente horizontale au point d'abscisse $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse 1.

On trace la « demi-tangente » verticale au point O.
Pourquoi demi-tangente ?
Pour avoir une tangente complète, il faudrait que la fonction soit définie à gauche de 0 ce qui n'est pas le cas ici.

La demi-tangente verticale au point O est la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $-\vec{j}$; on peut aussi dire que la demi-tangente verticale au point O est la demi-droite [Oy').

Comment sait-on que la courbe « part » comme ça ? D'une part parce que la fonction f décroissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ donc la courbe $\mathcal{C}$ ne peut admettre la demi-droite [Oy) pour demi-tangente en O.



Remarque :

La tangente au point A d'abscisse 1 a pour équation $y = x + 1$.

La tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$ a pour équation $y = -\frac{1}{\mathrm{e}}$.

$\boxed{12}$ **Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$**

1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$

Dérivée

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle).

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

Étude du signe de la dérivée et variations :

$1-\ln x < 0$ (1)	$1-\ln x = 0$ (2)	$1-\ln x > 0$ (3)
(1) $\Leftrightarrow \ln x > 1$ $\Leftrightarrow x > \mathrm{e}$	(2) $\Leftrightarrow \ln x = 1$ $\Leftrightarrow x = \mathrm{e}$	(3) $\Leftrightarrow \ln x < 1$ $\Leftrightarrow x < \mathrm{e}$

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	+	0	–	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

$f(\mathrm{e}) = \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$

Limites aux bornes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (limite de référence)

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (à détailler)

Conséquences graphiques des limites :

La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale.

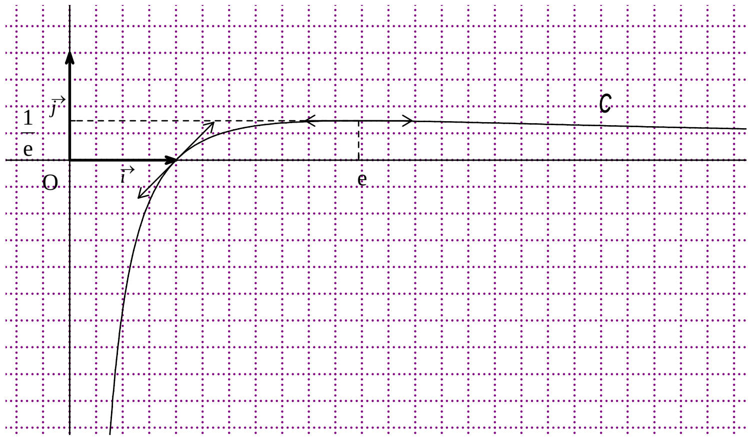
2°) **Tracé de la courbe**

Mise en place des éléments de la courbe :

- placer le point A de coordonnées $\left(\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ (on utilise la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de l'abscisse et de l'ordonnée du point A) ;
- tracer la tangente horizontale en ce point ;
- faire un tableau de valeurs ;
- tracer la courbe.

N.B. : Il n'y a pas à tracer les asymptotes puisque, comme ce sont les axes du repère, elles sont déjà tracées.
On trace ensuite la tangente au point d'abscisse 1, comme l'énoncé le demande.

On peut faire la construction sous forme d'un rébus.



Quel est l'intérêt de tracer nous-mêmes la courbe de la fonction *f* alors qu'une calculatrice graphique ou un ordinateur peut la faire ?
Certes une calculatrice graphique ou un ordinateur permettent d'obtenir rapidement la représentation graphique de *f* mais ce que ni une calculatrice graphique ni un ordinateur ne permettent d'obtenir c'est par exemple le fait que la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse e (on lira juste une valeur approchée de e).

3°) T' passe par le point O, origine du repère.

$\boxed{13}$ $f : x \mapsto \ln\left(\frac{5-x}{1+x}\right)$

1°) **Ensemble de définition**

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} \frac{5-x}{1+x} > 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$.

Il faut faire un tableau de signes.

$5-x=0$ | $1+x=0$
$x=5$ | $x=-1$

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
Signe de $5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $\frac{5-x}{1+x}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

$D_f =]-1 ; 5[$

2°) On pose $u(x) = \frac{5-x}{1+x}$.

u est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc par restriction sur l'intervalle $]-1 ; 5[$.

$\forall x \in]-1 ; 5[\quad u'(x) = -\frac{6}{(1+x)^2}$

Or $\forall x \in]-1 ; 5[\quad u(x) > 0$
Donc *f* est dérivable sur $]-1 ; 5[$ (composée de fonctions dérivables).

$$\forall x \in]-1 ; 5[\quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-\frac{6}{(1+x)^2}}{\frac{5-x}{1+x}} = -\frac{6}{(1+x)^2} \times \frac{1+x}{5-x} = -\frac{6}{(1+x)(5-x)}$$

$$\forall x \in]-1 ; 5[\quad f'(x) = -\frac{6}{(1+x)(5-x)}$$

Autre façon :

$$f'(x) = \frac{\frac{-1(1+x)-(5-x)}{(1+x)^2}}{\frac{5-x}{1+x}}$$

$$= -\frac{6(1+x)}{(1+x)^2(5-x)}$$

$$= -\frac{6}{(1+x)(5-x)}$$

3°) **Tableau de variation de *f* sur $]-1 ; 5[$:**

x	-1		5
Signe de -6		$-$	
Signe de $1+x$	0	$+$	
Signe de $5-x$		$+$	0
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	‖
Variations de *f*	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$ ‖

_f_ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1 ; 5[$.

4°) **Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.**

Les limites à calculer sont : $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to (-1)^+} (5-x) = 6 \\ \lim\limits_{x \to (-1)^+} (1+x) = 0^+ \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to (-1)^+} \underbrace{\frac{1+x}{5-x}}_{X} = +\infty .$$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$.

Donc par limite d'une composée $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x) = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} (5-x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 5^-} (1+x) = 6 \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x \to 5^-} \underbrace{\frac{1+x}{5-x}}_{X} = 0^+ .$$

Or $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$.

Donc par limite d'une composée $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -\infty$.

On peut déduire des limites précédentes que la courbe $\mathcal{C}$ admet les droites Δ et Δ' d'équations respectives $x = -1$ et $x = 5$ pour asymptotes verticales.

Rédaction pas très satisfaisante trouvée dans la solution d'un élève :

$\mathcal{C}$ admet deux asymptotes verticales Δ et Δ' d'équations $x = -1$ et $x = 5$.

5°) **Intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes du repère**

• **Déterminons l'ordonnée du point d'intersection A de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées.**

On calcule $f(0) = \ln\frac{5-0}{1+0} = \ln 5$ donc $A(0\,;\ln 5)$ (la calculatrice donne : $\ln 5 = 1,609...$).

Autre rédaction possible inspirée de la solution d'un élève :

$$\begin{aligned} y_A &= f(0) \\ &= \ln\frac{5-0}{1+0} \\ &= \ln 5 \end{aligned}$$

• **Déterminons l'abscisse du point B d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.**

On résout l'équation : $f(x) = 0$ (1).

Autre rédaction possible :

L'abscisse du point d'intersection B de $\mathcal{C}$ avec l'axe (Ox) est la solution de l'équation $f(x) = 0$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \ln\frac{5-x}{1+x} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln\frac{5-x}{1+x} = \ln 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{5-x}{1+x} = 1 \\ &\Leftrightarrow 5-x = 1+x \\ &\Leftrightarrow 4 = 2x \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{(valeur qui convient car elle est dans l'intervalle }]-1\,;5[\text{)} \end{aligned}$$

Donc $B(2\,;0)$.

6°) **Tracé de $\mathcal{C}$**

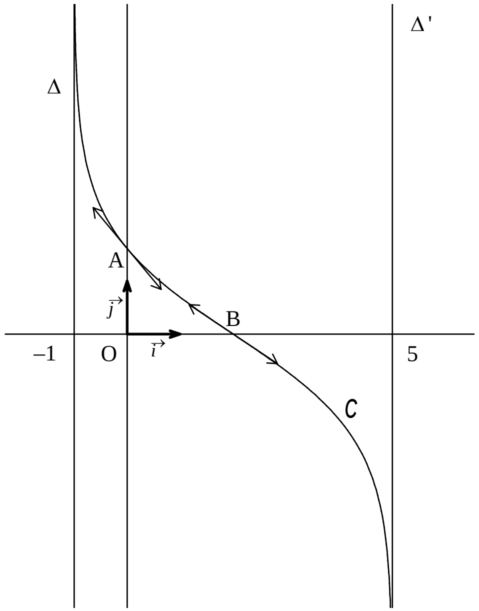
Tableau de valeurs (valeurs arrondies au dixième sur la deuxième ligne) :

x	– 0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$	2,4	1,6	1,1	0,7	0,3	0	– 0,3	– 0,8	– 1,1	– 1,6	– 2,4

Tangentes en A et B :

Le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(0) = -\frac{6}{5}$.

Le coefficient directeur de la tangente en B est $f'(2) = -\frac{2}{3}$.



Le point B est point d'inflexion à la courbe $\mathcal{C}$.

7°) Démontrons que $\mathcal{C}$ admet le point B pour centre de symétrie.

$$\forall h \in]-3\,;3[\quad f(2+h)+f(2-h)=\ln\left(\frac{3-h}{3+h}\right)+\ln\left(\frac{3+h}{3-h}\right)=0$$

On trouve cet intervalle en traduisant que $2+h$ et $2-h$ doivent appartenir à l'intervalle $]-1\,;5[$.

On peut détailler ainsi le calcul (comme je l'ai trouvé sur une feuille de solution d'élève) :

$$\begin{aligned}\forall h \in]-3\,;3[\quad f(2+h)+f(2-h)&=\ln\left(\frac{5-2-h}{1+2+h}\right)+\ln\left(\frac{5-2+h}{1+2-h}\right)\\&=\ln\left(\frac{3-h}{3+h}\right)+\ln\left(\frac{3+h}{3-h}\right)\\&=\ln(3-h)-\ln(3+h)+\ln(3+h)-\ln(3-h)\\&=\cancel{\ln(3-h)}-\cancel{\ln(3+h)}+\cancel{\ln(3+h)}-\cancel{\ln(3-h)}\\&=0\end{aligned}$$

Or $2\times 0=0$

Donc comme $\forall h \in]-3\,;3[\quad f(2+h)+f(2-h)=0$, on en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point B pour centre de symétrie.

On utilise la formule $f(a+h)+f(a-h)=2b$ (pour un centre de symétrie $\Omega(a,b)$).

Question supplémentaire :

Démontrer que *f* établit une bijection de l'intervalle $]-1\,;5[$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer l'expression de la bijection réciproque f^{-1} (on pourra résoudre l'équation $f(x)=y$ où *y* est un réel quelconque).

$\boxed{14}$ Indications :

1°) On étudie la fonction auxiliaire *f* définie par $f(x)=\ln(1+x)-x$.

2°) On applique directement l'inégalité démontrée précédemment pour $x=\dfrac{1}{n}$.

Solution détaillée :

1°) **Démontrons que $\forall x \in]0\,;+\infty[\quad \ln(1+x)<x$.**

On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)-x$ définie sur $]-1\,;+\infty[$ (fonction auxiliaire).

$D_f=]-1\,;+\infty[$

On peut donner cet ensemble de définition directement sans détailler la recherche). $f(x)$ existe si et seulement si $x+1>0$ si et seulement si $x>-1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1\,;+\infty[\quad f'(x)&=\frac{1}{x+1}-1\\&=\frac{1-1-x}{1+x}\\&=-\frac{x}{1+x}\end{aligned}$$

Nous allons dresser le tableau de variations de *f* uniquement sur $[0\,;+\infty[$.

x	0	$+\infty$
Signe de $-x$	0 $\quad$ $-$	
Signe de $1+x$	$+$	
Signe de $f'(x)$	0 $\quad$ $-$	
Variations de f	0 $\searrow$	

$f(0)=0$

D'après la tableau de variations de f sur $[0\,;+\infty[$, $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)<0$.

D'où $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad \ln(1+x)<x$.

2°) **Déduisons-en que $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$.**

On a démontré à la question 1°) que $\forall x\in\,]0\,;+\infty[\quad \ln(1+x)<x$.

On applique cette inégalité pour $x=\frac{1}{n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ (on a bien en effet $\frac{1}{n}>0$).

On obtient l'inégalité : $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

On a donc : $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$ (l'inégalité ne change pas de sens car $n>0$)

soit $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]<1$

soit $\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]<\ln\mathrm{e}$

On en déduit que : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$.

Version d'un élève :

Posons $x=\frac{1}{n}$.

$\forall n\in\mathbb{N}\quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

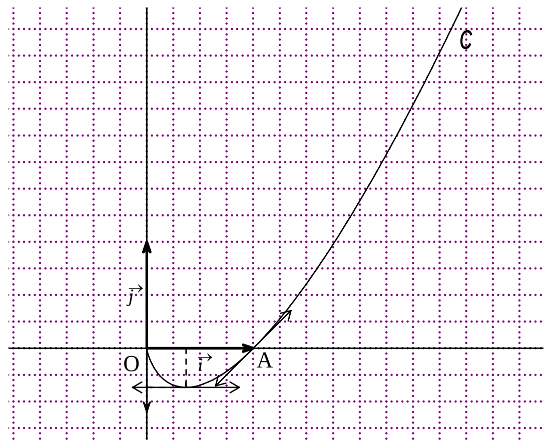
$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)$

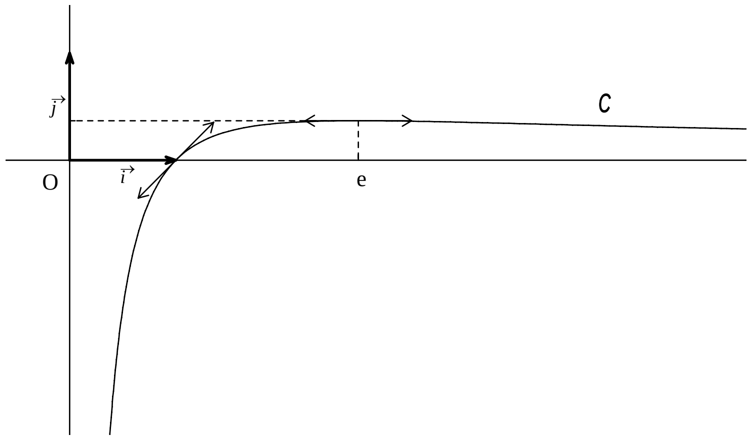
$1+\frac{1}{n}<\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right)^n$

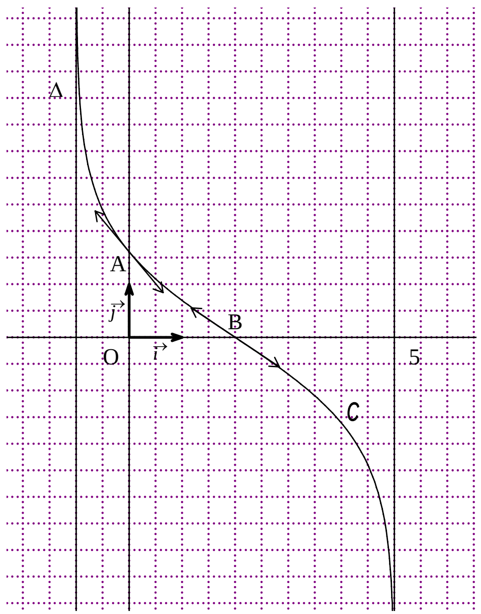
On en déduit que : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$.

Rappel :
Quand fait $v\circ u$, c'est le u qui est à l'intérieur de v.
On remplace la variable de v par $u(x)$.





$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
e
$\mathcal{C}$



Δ
A
$\vec{j}$
B
O
$\vec{i}$
5
$\mathcal{C}$