TS 3 **Devoir pour le vendredi 24 octobre 2009**

I. Dire si chacune des phrases suivantes est vraie ou fausse.
Justifier lorsque c'est vrai ; donner un contre-exemple lorsque c'est faux.

1°) Si f est une fonction définie et décroissante sur un intervalle de la forme $[a\,;+\infty[$ où a est un réel, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2°) Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, g ne s'annulant pas sur cet intervalle.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$.

3°) Si f est une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que pour tout $x\in[0\,;+\infty[$ on ait $0\le f(x)\le\sqrt{x}$,

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=0$.

II. On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$.

1°) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et démontrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2°) A l'aide du 1°), déterminer les limites en $+\infty$ des fonction g et h définies par $g(x)=\dfrac{x^2}{3+2\sin x}$ et

$h(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{3+2\sin x}$.

III. On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x+5}-3}$ . .

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\boldsymbol{D}$ de f.
2°) Etudier la limite de f en 2.

IV. On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\boldsymbol{D}$ de f ; en déduire que la limite de f en $+\infty$ est envisageable.
2°) Vérifier que l'on se trouve dans un cas d'indétermination que l'on précisera lorsque x tend vers $+\infty$.
3°) A l'aide de la quantité conjuguée $\sqrt{4x^2+1}+2x$, lever l'indétermination et donner la limite de f en $+\infty$.
On observera préalablement que la quantité conjuguée est strictement positive pour $x\ge 0$.
Vérifier le résultat obtenu en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur (par exemple *Geogebra*).

V. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\cos x\ \mathrm{e}^{-x}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, on a : $-\mathrm{e}^{-x}\le f(x)\le \mathrm{e}^{-x}$.

2°) En déduire la limite de f en $+\infty$.
Vérifier le résultat obtenu en utilisant un logiciel de tracé de courbes sur ordinateur (par exemple *Geogebra*).

VI. On considère la fonction $f : x\mapsto x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

TS 3

Correction du devoir pour le vendredi 24 octobre 2009

I.

1°) **Faux**

La fonction $f:\ x \mapsto \dfrac{1}{x-a+1}$ est une fonction définie et décroissante sur $[a\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2°) **Faux**

On considère les fonctions *f* et *g* définies sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=x^2$ et $g(x)=-x-1$.

g ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

3°) **Vrai**

$\forall x\in[0\,;+\infty[\quad 0\le f(x)\le\sqrt{x}$

Donc $\forall x\in]0\,;+\infty[\ 0\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ d'où $\forall x\in]0\,;+\infty[\ 0\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On pose $u(x)=0$ et $v(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=0$ donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

II. $f(x)=\dfrac{1}{3+2\sin x}$.

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $3+2\sin x\neq 0$

si et seulement si $2\sin x\neq -3$

si et seulement si $\sin x\neq -\dfrac{3}{2}$

Cette condition est toujours vérifiée donc $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad -1\le\sin x\le 1$

$-2\le 2\sin x\le 2$

$1\le 3+2\sin x\le 5$

$1\ge\dfrac{1}{3+2\sin x}\ge\dfrac{1}{5}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$ donc f est bornée sur $\mathbb{R}$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = x^2 \times f(x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{1}{5}$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq \frac{x^2}{5}$.

On pose $u(x) = \frac{x^2}{5}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty$ donc d'après <u>l'extension</u> du théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = \mathrm{e}^{-x} \times f(x)$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{5} \leq f(x) \leq 1$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{\mathrm{e}^{-x}}{5} \leq h(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$

On pose $v(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}$ et $w(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

III.

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ 2x + 5 \geq 0 \\ \sqrt{2x+5} - 3 \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \geq -\frac{5}{2} \\ \sqrt{2x+5} \neq 3 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ 2x + 5 \neq 9 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x \geq \frac{2}{3} \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\boldsymbol{D} = \left[\frac{2}{3} ; 2\right[\cup]2 ; +\infty[$

2°) Lorsque l'on étudie la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0, on rencontre une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

Pour lever l'indétermination, on va utiliser deux quantités conjuguées différentes.

$$\forall x \in \boldsymbol{D} \qquad f(x) = \frac{\left(2-\sqrt{3x-2}\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+5}-3\right)\left(\sqrt{2x+5}+3\right)\left(2+\sqrt{3x-2}\right)}$$

$$f(x) = \frac{4-(3x-2)}{(2x+5)-9} \times \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x) = \frac{6-3x}{2x-4} \times \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x) = \frac{-3(x-2)}{2(x-2)} \times \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

$$f(x) = \frac{-3}{2} \times \frac{\sqrt{2x+5}+3}{2+\sqrt{3x-2}}$$

En détaillant bien les calculs, on trouve :

$$\boxed{\lim_{x \to 2} f(x) = -\frac{9}{4}}$$

IV. $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - 2x$.

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $4x^2+1 \geq 0$ (toujours vrai)

$\boldsymbol{D} = \mathbb{R}$

2°) Lorsque x tend vers $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ».

3°) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{4x^2+1} + 2x > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sqrt{4x^2+1} + 2x \neq 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f(x) = \frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$$f(x) = \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0}$$

V. $f(x) = \cos x \ \mathrm{e}^{-x}$.

1°) Pour tout réel x, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$.
Donc en multipliant les deux membres par e^{x}, on obtient l'encadrement $\boxed{-\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}}$ (car $\mathrm{e}^{x} > 0$).
2°) On pose $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad u(x) \leq f(x) \leq v(x)$$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0 \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

VI. $f : x \mapsto x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}^*$

$\boxed{\text{Déterminons } \lim\limits_{x \to 0} f(x).}$

On rencontre un problème dans la détermination de la limite car $\sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite lorsque x tend vers 0.

On utilise le théorème des gendarmes.

N.B. : La méthode de changement de variable ne donne rien ici.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\times \ x^2 \ (x^2 \geq 0)$$

$$-x^2 \leq f(x) \leq x^2$$

(« Le sinus de n'importe quoi est toujours compris entre –1 et 1 au sens large. »)

(On a multiplié les deux membres de l'inégalité par x^2 qui est positif ou nul.)

On pose $u(x) = -x^2$ et $v(x) = x^2$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = \lim\limits_{x \to 0} v(x) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on a : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$.