TS3

Interrogation écrite du mardi 10 novembre 2009

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ……/20

Encadrer tous les résultats à la règle ; on rédigera sans utiliser aucune abréviation.

I. (2 points) Compléter directement le tableau ci-dessous.

$\mathrm{E}\left(\sqrt{2}\right)=$	$\mathrm{E}\left(\dfrac{2}{3}\right)=$	$\mathrm{E}(-5{,}1)=$	$\mathrm{E}(-11)=$

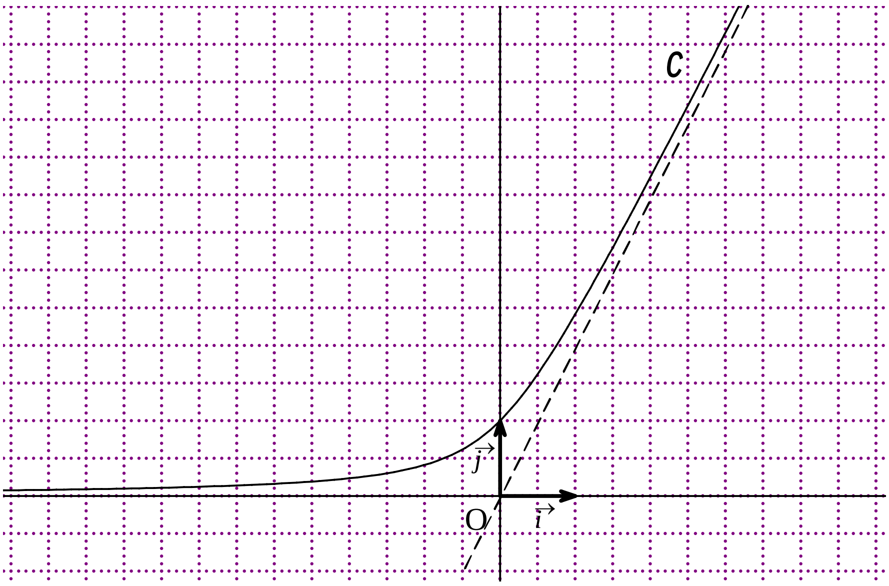
II. (6 points) On donne ci-contre la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{x^2+1}$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le tracé de $\mathcal{C}$ permet de conjecturer l'existence de deux asymptotes.

Démontrer par le calcul que $\mathcal{C}$ admet bien deux asymptotes que l'on précisera.

Présenter en détail les calculs pour l'une des deux asymptotes ; rédiger plus brièvement pour l'autre.

Les traits de fraction et les radicaux doivent être tirés à la règle.



On ne détaillera pas les formes indéterminées rencontrées.

………

………

………

………

………

………

………

………

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

III. (7 points)

1°) Compléter sans justifier le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto e^x + x - 5$ (flèches à la règle).

Mettre les limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Tous les calculs nécessaires seront faits au brouillon.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

2°) Démontrer, en rédigeant soigneusement, que l'équation $f(x) = 0$ (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

On précisera en particulier $f(\mathbb{R})$. Mettre toute la rédaction en écrivant une idée par ligne.

Compléter le tableau de variation précédent en y plaçant α.

……

……

……

……

……

……

……

……

3°) On donne le tableau de valeurs ci-dessous (les valeurs de $f(x)$ sont des troncatures au centième).

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	– 1,28	– 0,89	– 0,47	– 0,03	0,45	0,98	1,55	2,17	2,84	3,58	4,38

Donner un encadrement de α. Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

………. $< \alpha <$ ………. (amplitude de l'encadrement : …………)

4°) Démontrer que l'on a : $\ln(5-\alpha) = \alpha$.

……

……

IV. (1 point) Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -50$ et de raison 3.
Calculer $S = u_0 + u_1 + ... + u_{100}$. Donner le résultat sans justifier.

$S =$ ....

V. (1 point) Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $\frac{2}{3}$.
Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de n. Donner le résultat sans justifier sous forme factorisée.

$S_n =$ ....

VI. (1,5 points) Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
On sait que :
⋆ (u_n) est décroissante et que $u_0 = -1$.
⋆ (v_n) est à termes positifs ou nuls.
⋆ (w_n) est croissante et que $w_0 = 2$.

Compléter les phrases ci-contre en utilisant les mots « majorée » ou « minorée » pour les premiers pointillés de chaque phrase.

La suite (u_n) est …………………. par …………... .
La suite (v_n) est …………………. par …………... .
La suite (w_n) est …………………. par …………... .

VII. (0,5 point) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$.
Cette suite est-elle majorée ? Si oui, préciser un majorant. Faire une seule phrase de réponse sans justifier.

…………………………………………………………………………………………………….…….

VIII. (1 point) Donner une expression simplifiée sans utiliser de radical (x est un réel quelconque).

$\sqrt{4x^2} =$ .... ; $\sqrt{x^2 - 2x + 1} =$ ....

Aide à la rédaction pour les asymptotes (phrase-type).

« La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite D d'équation $y = \ldots$ pour asymptote horizontale en + ∞ (ou en – ∞). »

Bonne durée : 40 minute

Réponses

I.

$\mathrm{E}\left(\sqrt{2}\right)=1$	$\mathrm{E}\left(\dfrac{2}{3}\right)=0$	$\mathrm{E}\left(-5{,}1\right)=-6$	$\mathrm{E}\left(-11\right)=-11$

II.

On utilise les réécritures suivantes $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$; $f\left(x\right)-2x=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

La première permet de dire que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $-\infty$.

La deuxième permet de dire que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation $y=2x$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

III.

4°) Autre idée (que j'ai eue après et qui était intéressante)
Démontrer que l'on a : $\mathrm{e}^{-\alpha}\left(5-\alpha\right)=1$.

IV. $S=10100$

V. Suite géométrique

$$S_n=12\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]=12-12\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=12-12\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=12-8\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=4\left[3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right]$$

VIII.

Autre idée (intéressante et que je n'ai eu qu'après coup)

Simplifier $\sqrt{\sin^2 x}$.