TS — Exercices sur la dérivation

1 On considère la fonction $f : x \mapsto x|x|$.
La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner le nombre dérivé de *f* en 0.

2 On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x \ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
1°) Étudier la continuité de *f* en 0.
2°) Calculer $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$. La fonction *f* est-elle dérivable à droite en 0 ?
Que peut-on en déduire pour la courbe représentative $\mathcal{C}$ de *f* dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ au point d'abscisse 0 ?

3 On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2°) Le but de cette question est l'étude de la dérivabilité de *f* en 1 à gauche.
On pose $T(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.
Pour quelles valeurs de *h*, l'expression $T(h)$ est-elle définie ?
Démontrer, dans ce cas, que l'on a $T(h) = -\sqrt{-1 - \dfrac{2}{h}}$.
Étudier $\lim\limits_{h \to 0^-} T(h)$; que peut-on en déduire pour *f* ?
Que peut-on en déduire pour la représentation graphique $\mathcal{C}$ de *f* dans le plan muni d'un repère en termes de demi-tangente ?

4 On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 - x + 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$.
Démontrer que les représentations graphiques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' respectives de *f* et *g* dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ ont un seul point commun A et ont la même tangente en ce point.
On dit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' sont **tangentes** au point A.

5 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2 + 1}$.
1°) Calculer $f'(1)$.
2°) En utilisant la formule d'approximation affine tangente en 1, donner une valeur approchée de $f(1{,}0003)$.
Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Dans les exercices **6** à **10**, on demande de déterminer l'ensemble de définition de la fonction *f*, de déterminer sur quel ensemble *f* est dérivable et de calculer la dérivée.

6 $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ **7** $f : x \mapsto 4\cos^5(3x)$ **8** $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2 - 1)^3}$ **9** $f : x \mapsto x\sqrt{x^2 + 1}$ **10** $f : x \mapsto 3\tan^5 x$

11 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x - 1}{x + 3}$.
Calculer, pour $x \neq -3$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$.
Ne pas développer les dénominateurs.

12 On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\tan 2x}{x}$.
Déterminer l'ensemble de définition de *f* et étudier la limite de *f* en 0.

13 **Partie A**
On considère la fonction $g : x \mapsto x^3 + 3x^2 + 2$.
1°) Étudier *g* (dérivée, limites, tableau de variation).
2°) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
3°) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
4°) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de *x*.
Partie B
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 1}{(x+1)^2}$.
1°) Donner l'ensemble de définition de *f*.
2°) Justifier la dérivabilité de *f* et calculer $f'(x)$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
3°) Établir le tableau de variation de *f*. Compléter le tableau de variation de *f* avec les limites de *f* sans justifier.

14 On considère la fonction $f : x \mapsto \sin^2 x$.
Démontrer que, pour tout réel *x*, on a : $f''(x) + 4f(x) - 2 = 0$.

15 **Étude d'une fonction irrationnelle**
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Étudier la parité de *f*. Que peut-on déduire pour $\mathcal{C}$?
2°) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.
3°) Établir le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$ avec les limites.
4°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$.
Quelle est la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ sur $\mathbb{R}_+$?
5°) **Tracé de $\mathcal{C}$.**
Mettre en place les éléments du graphique sur $\mathbb{R}_+$: repère (prendre le centimètre pour unité graphique), asymptote Δ et tangente horizontale.
Déduire par symétrie une asymptote oblique Δ' en $-\infty$ que l'on tracera.
Tracer $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Compléter le tracé de $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}_-$. Vérifier le tracé sur ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe ou sur calculatrice graphique.

16 **Partie A**
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Déterminer l'ensemble de définition I de *f*.
2°) Étudier la continuité de *f* sur I.
3°) Étudier la limite de *f* à gauche en 1. Interpréter graphiquement.
4°) Étudier la dérivabilité de *f* en 0 à droite. Interpréter graphiquement.
5°) Justifier la dérivabilité de *f* sur]0 ; 1[et calculer $f'(x)$ pour $x \in \left]0\,;1\right[$.

Étudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.
On prendra garde sur la ligne du signe de $f'(x)$ de mettre 0 sous $x = 0$ car $f_d'(0) = 0$ et de mettre une double barre sous $x = 1$ car f n'est pas définie en 1.
Sur la ligne des variations de *f*, on mettra la valeur de $f(0)$.
6°) Tracer $\mathcal{C}$, son asymptote et la demi-tangente horizontale.
Placer le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et tracer la tangente en ce point.
Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

Partie B

On note Γ l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées x et y vérifient la relation $x\left(x^2 + y^2\right) - y^2 = 0$ (E).
On note $\mathcal{C}$ ' l'image de $\mathcal{C}$ par la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses.
1°) Donner une équation de la courbe $\mathcal{C}$ '.

2°) Démontrer que la relation (E) est équivalente au système $\begin{cases} \left(y - \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)\left(y + \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right) = 0 \\ x \in [0\ ;\ 1[\end{cases}$.

On raisonnera dans les **deux sens** en démontrant que si la relation (E) est vérifiée alors le système est vérifié puis on démontrera la réciproque en établissant que si le système est vérifié alors la relation (E) est vérifiée.

On rappelle que :

$\mathrm{M}(x\,;y) \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si $\begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$

3°) En déduire que Γ est la réunion de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ '.
Tracer Γ sur la figure de la **partie A**.

La courbe Γ porte le nom de **cissoïde de Dioclès**.
Dioclès était un mathématicien grec de l'antiquité du II^e siècle après Jésus-Christ qui a mis en place en place cette courbe pour résoudre un problème célèbre : la duplication du cube.

Corrigés

$\boxed{1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x|x|}{x} = |x|$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ donc la fonction *f* est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Explication :

La fonction $u : x \mapsto x$ est dérivable en 0 mais $v : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 (voir le cours, on démontre que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 en utilisant le taux de variation, la fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0, le nombre dérivé à gauche est égal à – 1, le nombre dérivé à droite est égal à 1. (Pour qu'une fonction soit dérivable en un réel *a*, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à gauche et à droite et que les nombres dérivés à gauche et à droite soit égaux).

La fonction *f* est le produit des fonctions *u* et *v*.
La règle nous dit que le produit de deux fonctions dérivables en *a* est dérivable en *a*.
Elle ne nous dit rien sur le produit d'une fonction dérivable en *a* par une fonction non dérivable en *a*.
On ne peut donc rien en conclure sur la dérivabilité de la fonction en *a*.

Pour étudier la dérivabilité de la fonction *f* en 0, on ne peut pas utiliser de règle du cours ; il faut étudier la limite du taux de variation.

Remarque : autre façon plus longue

On étudie la dérivabilité de f en 0 à droite et à gauche.

$f(x) = x|x|$

Donc $\begin{cases} f(x) = x^2 \ \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = -x^2 \ \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ donc *f* est dérivable en 0 à droite et le nombre dérivé en 0 à droite est égal à 0.

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{-x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-x) = 0$ donc *f* est dérivable en 0 à gauche et le nombre dérivé en 0 à gauche est égal à 0.

Donc *f* est dérivable en 0 et le nombre dérivé de *f* en 0 est égal à 0 (autrement dit : *f* '(0) = 0).

$\boxed{2}$ **Solution détaillée :**

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x \quad \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Attention, la fonction *f* est bien définie sur $\mathbb{R}_+$: en effet on a une expression qui définit les images de tous les nombres strictement supérieurs à 0 et l'on définit l'image de 0 en posant $f(0)=0$.

1°) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0$ (limite de référence).

De plus, $f(0)=0$ (par définition de la fonction *f*) donc *f* est continue à droite en 0.

2°) $\forall h \in \mathbb{R}_+^* \quad \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{h \ln h - 0}{h} = \dfrac{h \ln h}{h} = \ln h$

Or $\lim\limits_{h\to 0^+} \ln h = -\infty$ donc $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -\infty$.

Comme cette limite n'est pas finie, la fonction *f* n'est pas dérivable en 0 (à droite).

Néanmoins, comme *f* est continue en 0 à droite, la courbe $\mathcal{C}$ possède une demi-tangente verticale au point O d'abscisse 0 : c'est la demi-droite [O*y*') (d'origine O) précisée par le système $\begin{cases} x = 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$.

Variante d'écriture et de rédaction :

On aurait aussi pu écrire : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$ donc la fonction *f* n'est pas dérivable à droite en 0 (limite pas finie).

$\boxed{3}$ La fonction *f* est une fonction irrationnelle (à cause de la présence d'un radical sous lequel figure la variable).
1°) $\mathcal{D}_f = [-1\,;1]$ 2°) $\lim\limits_{h\to 0^-} T(h) = -\infty$ donc la fonction *f* n'est pas dérivable à gauche en 1.

Dans le calcul, à un moment on a : $\sqrt{h^2} = |h|$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $1 - x^2 \geq 0$

si et seulement si $x^2 \leq 1$
si et seulement si $-1 \leq x \leq 1$

2°) $T(h) = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$T(h)$ existe si et seulement si $\begin{cases} -1 \leq 1+h \leq 1 \\ h \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} -2 \leq h \leq 0 \\ h \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $-2 \leq h < 0$

$\forall h \in [-2\,;0[\qquad f(1+h) = \sqrt{1-(1+h)^2} = \sqrt{-2h-h^2}$

$f(1) = 0$

$$\forall h \in [-2\,;0[\quad T(h)=\frac{\sqrt{-2h-h^2}}{h}=\frac{\sqrt{h^2\left(-\frac{2}{h}-1\right)}}{h}=\frac{\sqrt{h^2}\times\sqrt{-\frac{2}{h}-1}}{h}=\frac{|h|\times\sqrt{-\frac{2}{h}-1}}{h}$$

Or $\forall h \in [-2\,;0[\quad |h|=-h$

Donc $\forall h \in [-2\,;0[\quad T(h)=\dfrac{-h\times\sqrt{-\frac{2}{h}-1}}{h}=-\sqrt{-\dfrac{2}{h}-1}$

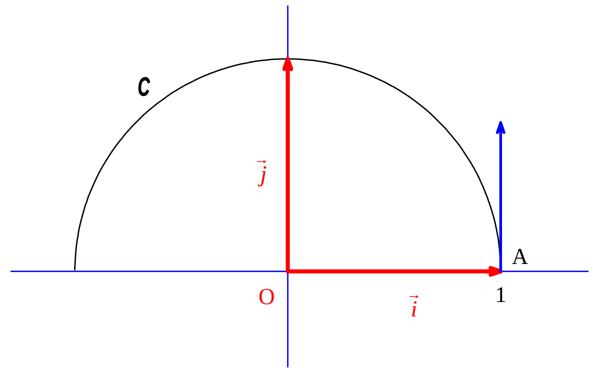
On étudie la limite de $T(h)$ quand h tend vers 0.
Comme h appartient à l'intervalle [– 2 ; 0[, on fait tendre h vers 0^-.

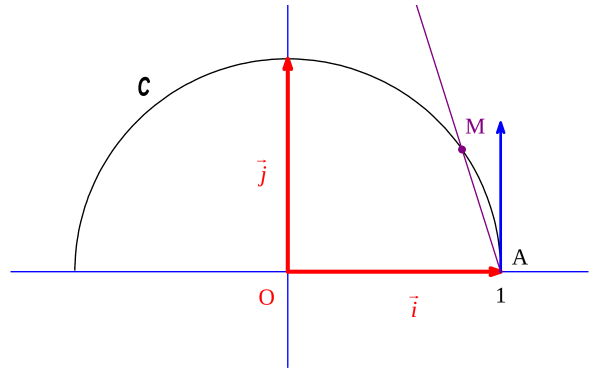
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{h\to 0^-}\left(\underbrace{-\frac{2}{h}-1}_{X}\right)=+\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty}\left(-\sqrt{X}\right)=-\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une composée $\lim\limits_{h\to 0^-} T(h)=-\infty$.

Comme f est continue à gauche en 1, on en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente verticale au point A(1 ; 0). C'est la demi-droite d'origine A précisée par le système $\begin{cases} x=1 \\ y\geq 0\end{cases}$.

La demi-tangente en A est la position limite de la demi-droite [AM) où M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A.

Graphique :





Remarque : un logiciel de géométrie dynamique ne trace en général pas les tangentes ou demi-tangentes verticales.

Rappel : une demi-tangente ne comporte qu'une seule flèche ; une demi-tangente verticale part du point.

En fait, la courbe $\mathcal{C}$ est un demi-cercle (démonstration facile).

$\boxed{4}$ **Méthode :** Pour démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont un seul point commun on démontre que l'équation $f(x)=g(x)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

On résout l'équation $f(x)=g(x)$.
On démontre qu'il y a une seule solution : 0.

Donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont le point A(0 ; 1) pour seul point commun.

$f'(x)=2x-1$ et $g'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

$f'(0)=-1$ et $g'(0)=-1$ donc $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont la même tangente en A de coefficient directeur –1.

$\boxed{5}$ 1°) $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=-\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f'(1)=-1$ 2°) On a : $f(1+h)\approx f(1)+hf'(1)$ pour h « proche » de 0 soit $f(1+h)\approx 1-h$; donc pour $h=0{,}0003$, $f(1{,}0003)\approx 1-0{,}0003$ d'où $f(1{,}0003)\approx 0{,}9997$; d'après la calculatrice, $f(1{,}0003)=0{,}99970004...$
On voit donc que les deux résultats sont très proches.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2+1}$

1°) Calculons $f'(1)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$

Ainsi, $f'(1) = -\dfrac{4\times 1}{\left(1^2+1\right)^2} = -\dfrac{4}{2^2} = -\dfrac{4}{4} = -1$

2°) Trouvons une valeur approchée de $f(1{,}0003)$ à l'aide de la formule d'approximation affine tangente en 1.

$f(1) = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f'(1) = -1$

f est dérivable en 1 donc il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 telle que, pour tout réel h, on ait $f(1+h) = f(1) + hf'(1) + h\varepsilon(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Donc $f(1+h) = 1 - h + h\varepsilon(h)$.

$f(1+h) \approx 1-h$ pour h « proche » de 0

Donc pour $h = 0{,}0003$, $f(1{,}0003) \approx 1 - 0{,}0003$ d'où $f(1{,}0003) \approx 0{,}9997$.

D'après la calculatrice, $f(1{,}0003) = 0{,}99970004...$

On voit donc que les deux résultats sont très proches.

$\boxed{6}$ Dérivée d'une fonction définie par un radical (fonction irrationnelle)

Ensemble de définition :

Mise en garde :

Ne pas commencer à écrire $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ (ceci n'est vrai que si $x+1 \geq 0$ et si $x-1>0$ c'est-à-dire $x>1$).

De manière générale, pour trouver l'ensemble de définition d'une fonction, il ne faut pas modifier l'expression « originale » de la fonction.

$f(x)$ existe si et seulement si $\dfrac{x+1}{x-1} \geq 0$.

On fait un tableau de signes.

D = $]-\infty\,;-1] \cup]1\,;+\infty[$

Étude de la dérivabilité :

On considère les fonctions u et v définies par $u(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

On a $f = v$ o u.

u est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

v est dérivable sur l'intervalle]0 ; +∞[(la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0).

$]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[\xrightarrow{u}]0\,;+\infty[\xrightarrow{v} \mathbb{R}$ (en bout de chaîne on a toujours $\mathbb{R}$)

On trouve cette réunion d'intervalles
par rapport à cet intervalle (domaine de dérivabilité de v).

Si $x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$, alors $u(x) > 0$ d'après le tableau de signe.

La règle de dérivation d'une composée permet de dire que f est dérivable sur $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

$$\forall x \in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[\qquad f'(x) = \frac{\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = \frac{\dfrac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = \frac{-\cancel{2}}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = -\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$$

On peut encore transformer cette dernière expression.

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} = -\frac{1}{(x-1)^2} \times \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

En version courte, on applique la formule : $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour dériver une racine carrée, il faut que le radicande soit <u>strictement</u> positif.

$-1 \in$ ***D*** mais la règle de dérivation d'une composée ne permet pas de savoir si f est dérivable en – 1 à gauche.

Il faudrait calculer $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ (ce qu'on ne fait pas ici).

7 **Solution détaillée :**

$f : x \mapsto 4\cos^5(3x)$

Faire une réécriture : écrire $f(x) = 4\left[\cos(3x)\right]^5$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 4\times5\times(-3\sin 3x)\times(\cos 3x)^4 = -60\sin 3x\times(\cos 3x)^4$

(Formules : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$; $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$)

8 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$; $f'(x) = -\dfrac{6x}{(x^2-1)^4}$ (formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$).

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)^3}$

$f(x)$ existe si et seulement si $(x^2-1)^3 \neq 0$

si et seulement si $x^2-1 \neq 0$

si et seulement si $x \neq 1$ et $x \neq -1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\}$ comme fonction rationnelle.

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\ ;\ 1\} \quad f(x) = -\dfrac{3\times2x}{(x^2-1)^4} = -\dfrac{6x}{(x^2-1)^4}$

9 **Solution détaillée :**

$f : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+1 \geq 0$

si et seulement si $x^2 \geq -1$ (toujours vrai)

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (explication à donner avec la fonction comportant une racine carrée).

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x^2+1+x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$

10 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = 3\times5\times(1+\tan^2 x)\times(\tan x)^4 = 15(1+\tan^2 x)\times\tan^4 x$

Autre écriture de la dérivée : $f'(x) = \dfrac{15}{\cos^2 x}\times\tan^4 x$

11 $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+3}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-3\}$

On utilise à chaque fois la formule : $\boxed{\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}}$.

Il est déconseillé d'utiliser la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$: les résultats sont plus compliqués et il faut ensuite les simplifier.

$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f'(x) = \dfrac{7}{(x+3)^2}$; $f''(x) = -\dfrac{2\times7}{(x+3)^3} = -\dfrac{14}{(x+3)^3}$; $f^{(3)}(x) = -\left[-\dfrac{3\times14}{(x+3)^4}\right] = \dfrac{42}{(x+3)^4}$;

$f^{(4)}(x) = -\dfrac{168}{(x+3)^5}$

On notera que l'ordre de dérivation (à partir de 3) se met entre parenthèses en exposant.

12 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* \backslash \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ (il faut résoudre $\cos 2x \neq 0$; rappel : $\cos X = 0 \Leftrightarrow X = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$)

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = 2$ (limite par taux de variation)

Solution détaillée :

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases}$

$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^* \backslash \left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0} \tan(2x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to0} x = 0 \end{array}\right\}$ donc on rencontre en 0 une forme indéterminée du type "$\dfrac{0}{0}$".

1$^{\text{ère}}$ méthode : réécriture

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin 2x}{x\ \cos 2x} \\ &= \frac{2\sin x \times \cos x}{x \times \cos 2x} \\ &= 2\frac{\cos x}{\cos 2x}\times\frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

(on utilise la formule de duplication du sinus : sin 2x = 2 sin x cos x)

2$^{\text{e}}$ méthode : méthode par taux de variation

Posons $g(x) = \tan 2x$.

$\forall\, x \in \boldsymbol{D}_f \quad f(x) = \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$

Or $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\} \quad g'(x) = 2\left(1+\tan^2(2x)\right)$ (dérivée d'une composée)

Rappel : $(\tan u)' = u'\left(1+\tan^2 u\right)$

$(\tan x)' = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0)$ (définition du nombre dérivé de g en 0)

Or $g'(0) = 2\left(1+\tan^2 0\right) = 2\times\left(1+0^2\right) = 2\times 1 = 2$ (car tan 0 = 0)

D'où $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 2$.

$\boxed{13}$ **Partie A**

$g : x \mapsto x^3+3x^2+2$

1°) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2+6x = 3x(x+2)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

2°) Bien rédiger avec le corollaire du TVI dans l'intervalle $\left]-\infty\,;-2\right]$.

Sur $\left[-2\,;+\infty\right[$, g admet un minimum global égal à 2 donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

3°) $-3{,}20 < \alpha < -3{,}19$ (la calculatrice donne $\alpha = -3{,}195823...$)

4°) Si $x < \alpha$, alors $g(x) < 0$; $g(\alpha) = 0$; si $x > \alpha$, alors $g(x) > 0$.

Partie B

1°) $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2°) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

3°) f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\alpha\right]$; f est décroissante sur l'intervalle $\left[\alpha\,;-1\right[$; f est croissante sur l'intervalle $\left]-1\,;+\infty\right[$. Dans le tableau de variation, on met l'extremum local $f(\alpha)$ (valeur exacte).

Correction détaillée :

Partie A

1°) g est une fonction polynôme donc elle est (continue et) dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad g'(x) = 3x^2+6x = 3x(x+2)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right) = -\infty$ (règle du monôme de plus haut degré pour une fonction polynôme non nulle)

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right) = +\infty$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$*		+	0	–	0	+	
Variations de g	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

* On utilise la règle du signe d'un polynôme du second degré.

Ou en détaillant plus le signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de 3x		–		–	0	+	
Signe de x + 2		–	0	+		+	
Signe de $g'(x)$*		+	0	–	0	+	
Variations de g	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

2°)

• On se place dans l'intervalle $\mathrm{I}_1 =]-\infty\,;-2]$.

g est continue sur I_1.
g est strictement croissante sur I_1.
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et $g(-2)=6$ (pour une borne ouverte, on calcule la limite ; pour une borne fermée, on calcule l'image).
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(\mathrm{I}_1) =]-\infty\,;6]$
$0 \in]-\infty\,;6]$
Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique racine α dans I_1.

• On se place dans l'intervalle $\mathrm{I}_2 = [-2\,;+\infty[$.

g admet un minimum global égal à 2 sur I_2 donc l'équation $g(x)=0$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

Bilan :

L'équation $g(x)=0$ admet une unique racine α dans $\mathbb{R}$.

4°)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B $\quad f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{(x+1)^2}$

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $(x+1)^2 \neq 0$
si et seulement si $x \neq -1$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

2°) f est une fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)(x^3-1)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(x+1)(3x^3+3x^2-2x^3+2)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{(x+1)(x^3+3x^2+2)}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{x^3+3x^2+2}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

Astuce pour calculer la dérivée :

Ecrire $f(x)$ comme un produit : $f(x) = (x^3-1)\times\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

On pose : $u(x) = x^3-1$ et $v(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

On a : $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^3}$.

$f'(x) = u'(x)\times v(x) + u(x)\times v'(x) = \ldots$

3°)

x	$-\infty$		α		-1		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(1+x)^3$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$f(\alpha) = -6{,}9768\ldots$ (on utilise la calculatrice avec sur TI la touche 2nd TRACE puis on va dans Maximum).
Fenêtre prendre Xmin = - 6 ; Xmax = 6 ; Xgrad = 1 ; Ymin = - 15 ; Ymax = 3 ; Ygrad = 1 ; Yres = 1.

On peut justifier aisément que $f(\alpha) < 0$.

En effet, $\alpha < 0$ donc $\dfrac{\alpha^3-1}{(\alpha+1)^2} < 0$.

La représentation graphique de f fait apparaître une asymptote oblique.

$\boxed{\textbf{14}}$ $\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = 2\sin x\,\cos x$; $\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

Solution détaillée :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est la puissance entière d'une fonction dérivable.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x) = 2\sin x\,\cos x$ (on utilise la formule $(u^2)' = 2uu'$; la formule générale est $(u^n)' = nu'u^{n-1}$).

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de fonctions dérivables.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x) = 2(\cos x\times\cos x - \sin x\times\sin x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f''(x) + 4f(x) - 2 = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 4\sin^2 x - 2$$
$$= 2\cos^2 x - 2\sin^2 x + 4\sin^2 x - 2$$
$$= 2(\cos^2 x + \sin^2 x) - 2$$
$$= 2 - 2$$
$$= 0$$

On en déduit que la fonction *f* est une solution particulière de l'équation différentielle $y''+4y-2=0$.

$\boxed{15}$ Étude d'une fonction irrationnelle

On appelle **fonction irrationnelle** une fonction dont l'expression est la racine carrée (ou plus généralement la racine n-ième) d'une fonction polynôme ou rationnelle.

1°) La fonction *f* est paire ; pour le démontrer, ne pas oublier de dire que le domaine de définition de *f* est centré en 0.

Solution détaillée :

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$

$\mathcal{D}_f$ est centré en 0.

$$\forall x\in\mathcal{D}_f\quad f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}$$
$$=\sqrt{x^2+1}$$
$$=f(x)$$

On en déduit que *f* est paire.

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

2°) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ (on applique la règle de dérivation d'une fonction de la forme $\sqrt{u}$:

$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$).

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de x		–	0	+	
Signe de $\sqrt{x^2+1}$		+		+	
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variation de *f*	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

f est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4°) Pour tout réel *x* positif ou nul, on a : $f(x)-x=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$.

On utilise cette écriture pour montrer :

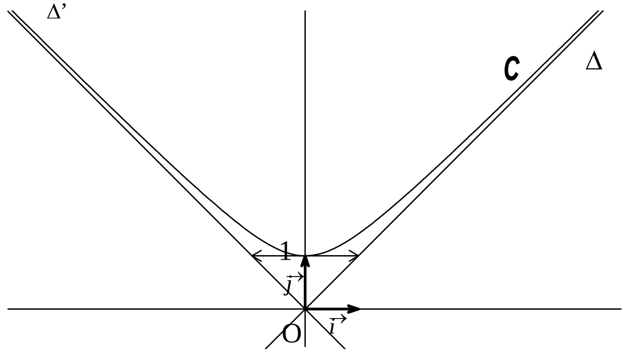
- que la droite Δ d'équation $y=x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$;
- que la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur $\mathbb{R}^+$.

Solution détaillée :

Technique utilisée : quantité conjuguée

$$f(x)-x=\sqrt{x^2+1}-x=\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

5°) Pour le tracé de la courbe, bien tracer les deux asymptotes obliques $\Delta : y=x$ et $\Delta' : y=-x$ qui est la symétrique de Δ par rapport à l'axe des ordonnées.
On doit aussi tracer la tangente horizontale au point d'abscisse 0.



$\boxed{16}$ Faire les traits de fractions et racines à la règle.

Partie A

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}\dfrac{x^3}{1-x}\geq 0\\ 1-x\neq 0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}\dfrac{x^3}{1-x}\geq 0\\ x\neq 1\end{cases}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de x^3		–	0	+		+	
Signe de $1-x$		+		+	0	–	
Signe de $\dfrac{x^3}{1-x}$		–	0	+	‖	–	

L'ensemble de définition de *f* est l'intervalle $\mathrm{I}=[0\ ;1[$.

2°) Étudions la continuité de *f* sur I.

On pose $u(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

$f = v \circ u$

Or *u* est continue sur I car c'est une fonction rationnelle et *v* est continue sur son ensemble de définition (fonction de référence).
Donc *f* est continue sur I par composée de deux fonctions continues.

3°) **Limite de *f* à gauche en 1 ; interprétation graphique.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} x^3=1\\ \lim\limits_{x\to1^-}(1-x)=0^+\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{1-x}=+\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-}\underbrace{\dfrac{x^3}{1-x}}_{X}=+\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'une composée on obtient } \lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x = 1$ pour asymptote verticale.

4°) **Explication pour comprendre la démarche**

$f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$

$\mathrm{I}=[0\,;1[$

$u(x)\geq 0$ pour $x\in[0\,;1[$

$u(x)>0$ pour $x\in]0\,;1[$

$\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$u(x)=0$ pour $x=0$

Etude spéciale pour $x=0$

$T(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ pour $x\in]0\,;1[$ (on est obligé d'enlever le 0 de l'ensemble de définition car on divise par *x* pour former le taux de variation) ; *f* est dérivable en 0 à droite et $f_d\,'(0)=0$; donc $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0.

Détail du calcul de $T(x)$.

$$T(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}{x}$$

$$=\frac{\sqrt{\dfrac{x^2\times x}{1-x}}}{x}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2}\times\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{x}$$

$$=\frac{|\,x\,|\times\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{x}$$

$$=\frac{\cancel{x}\times\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}{\cancel{x}}$$

$$=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\sqrt{\frac{x}{1-x}}=0$$

5°) $\forall x\in]0\,;1[\quad u'(x)=\dfrac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}$

$$\forall x\in]0\,;1[\quad f'(x)=\frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}\times\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}=\frac{x^2(3-2x)}{2(1-x)^2}\times\sqrt{\frac{1-x}{x^3}}=\frac{x^2(3-2x)}{2(1-x)^2}\times\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2}\times\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{x(3-2x)}{2(1-x)^2}\times\frac{\sqrt{1-x}\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{\cancel{x}(3-2x)}{2(1-x)^2}\times\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\cancel{x}}=\frac{(3-2x)}{2(1-x)^2}\times\sqrt{x(1-x)}$$

$$\forall x\in]0\,;1[\quad f'(x)=\frac{3-2x}{2(1-x)^2}\times\sqrt{x(1-x)}.$$

On peut encore transformer le résultat de la manière suivante :

$$\forall x\in]0\,;1[\quad f'(x)=\frac{3-2x}{2(1-x)(1-x)}\times\sqrt{x}\times\sqrt{1-x}=\frac{3-2x}{2(1-x)\sqrt{1-x}\,\cancel{\sqrt{1-x}}}\times\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{1-x}}=\frac{3-2x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}\times\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\frac{3-2x}{2(1-x)}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

De plus, on a démontré que *f* est dérivable à droite en 0 et que $f_d\,'(0)=0$.
Il est important de dire au terme de cette étude que *f* est dérivable sur l'intervalle [0 ; 1[(0 compris).

L'expression obtenue est donc valable pour tout $x \in \mathrm{I}$ ($\mathrm{I} = [0\ ;\ 1[$).

$\forall x \in]0\ ;1[\quad 2(1-x)^2 > 0$

$\forall x \in]0\ ;1[\quad \sqrt{x(1-x)} > 0$

$\forall x \in]0\ ;1[\quad 3-2x > 0$

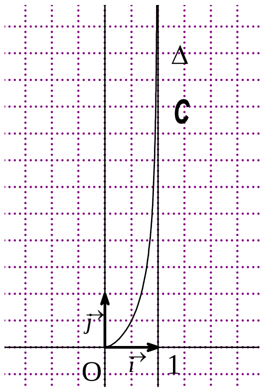
Donc $\forall x \in]0\ ;1[\quad f\,'(x) > 0$

$f_d\,'(0) = 0$

Donc *f* est strictement croissante sur I.

6°) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$; $f\,'\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Vérifier le tracé à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur.



Partie B

$x(x^2+y^2) - y^2 = 0$ (E)

1°) C ' = $S_{(Ox)}$ (C) donc C ' a pour équation $y = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

On peut aussi dire que C ' est la représentation graphique de la fonction *g* définie sur l'intervalle $[0\,;1[$ par $g(x) = -\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$.

2°) Démontrons que la relation (E) est équivalente au système (S) $\begin{cases}\left(y-\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)\left(y+\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)=0 \\ x \in [0\ ;\ 1[\end{cases}$.

On va raisonner dans les **deux sens.**

1er sens : On suppose que la relation (E) est vérifiée. On va alors démontrer que le système (S) est vérifié.

On a alors : $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$

Donc : $x^3 + xy^2 - y^2 = 0$

D'où : $x^3 + (x-1)y^2 = 0$.

Donc $x^3 = (1-x)y^2$.

Or on voit que si $x = 1$, alors on aurait $1^3 = (1-1)y^2$ soit $1 = 0$ ce qui est faux.

Donc $x \neq 1$.

Par suite, $1 - x \neq 0$. Peut donc diviser les deux membres par $1 - x$.

On obtient alors l'égalité $\frac{x^3}{1-x} = y^2$.

Or $y^2 \geq 0$ donc $\frac{x^3}{1-x} \geq 0$.

Par suite, en faisant un tableau de signe, on trouve que $x \in [0\ ;\ 1[$.

Ainsi on a démontré que si un couple $(x\ ;\ y)$ vérifie la relation (E), alors $\left(\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)^2 = y^2$ et $x \in [0\ ;\ 1[$.

Donc $y^2 - \left(\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)^2 = 0$ et $x \in [0\ ;\ 1[$.

Finalement, $\left[y^2 - \left(\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)\right]^2 = 0$ et $x \in [0\ ;\ 1[$.

Finalement, $\begin{cases}\left(y-\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)\left(y+\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)=0 \\ x \in [0\ ;\ 1[\end{cases}$

Ainsi le couple (x, y) vérifie le système (S).

2e sens : On suppose que le système (S) est vérifié. On va alors démontrer que la relation (E) est vérifiée.

Si $\begin{cases}\left(y-\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)\left(y+\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)=0 \\ x \in [0\ ;\ 1[\end{cases}$, alors $\left(y-\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)\left(y+\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)=0$

D'où $y^2 - \left(\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right)^2 = 0$

On a alors : $y^2 - \frac{x^3}{1-x} = 0$

D'où $y^2(1-x) - x^3 = 0$.

$y^2 - xy^2 - x^3 = 0$

$-y^2 + xy^2 + x^3 = 0$

$-y^2 + x(y^2 + x^2) = 0$

$x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$

3°) Déduisons-en que Γ est la réunion de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}$ '.

$$\mathrm{M}(x\,;y)\in\Gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)\left(y+\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)=0 \\ x\in[0\,;1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}=0 \text{ ou } y+\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}=0 \\ x\in[0\,;1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}} \\ x\in[0\,;1[\end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y=-\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}} \\ x\in[0\,;1[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{M}\in\mathcal{C} \text{ ou } \mathrm{M}\in\mathcal{C}'$$

Conclusion : $\Gamma = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$

Compléments de logique

Soit P et Q deux propositions mathématiques.

On peut considérer la proposition (P ou Q) notée $P \vee Q$ et la proposition (P et Q) notée $P \wedge Q$.

Propriété

Soit P, Q, R deux propositions mathématiques. On a la règle suivante : $P\wedge(Q\vee R)=(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$ P et (Q ou R) = (P et Q) ou (P et R)

On dit que le « et » est « distributif » sur le « ou ».
De même, le « ou » est distributif » sur le « et ».

Ici, on a : $\begin{cases} P \\ Q \text{ ou } R \end{cases}$ c'est-à-dire P et (Q ou R).

Classification des exercices par compétences

Compétences	Exercices
Savoir étudier la dérivabilité d'une fonction en un réel en utilisant la définition (limite du taux de variation)	$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$.
Tangente en un point	$\boxed{4}$.
Appliquer la formule d'AAT	$\boxed{5}$.
Approcher les solutions d'une équation	$\boxed{7}$ et $\boxed{8}$.
Démontrer qu'une fonction est bijective et déterminer sa bijection réciproque	$\boxed{9}$ et $\boxed{10}$.