TS

Exercices sur les limites de fonctions (2)

Dans les exercices $\boxed{1}$ à $\boxed{19}$, déterminer dans chaque cas l'ensemble de définition de la fonction f et déterminer la limite demandée en précisant chaque fois si l'on rencontre une forme indéterminée.

$\boxed{1}$ $f(x)=\sqrt{4x^2+1}-2x$; $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$.

$\boxed{2}$ $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{3}$ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$; $\lim\limits_{1} f$.

$\boxed{4}$ $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; $\lim\limits_{1} f$.

$\boxed{5}$ $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{6}$ $f(x)=\sqrt{x+4}-x$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{7}$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{8}$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{9}$ $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{+\infty} f$ à l'aide du changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$.

$\boxed{10}$ $f(x)=\ln(2x+3)-\ln(x+1)$; $\lim\limits_{+\infty} f$.

$\boxed{11}$ $f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{0^+} f$ à l'aide du changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{0^-} f$.

$\boxed{12}$ $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{5x}$; $\lim\limits_{0} f$ à l'aide du changement de variable $X=2x$.

$\boxed{13}$ $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{2x}}{5x}$; $\lim\limits_{0} f$.

$\boxed{14}$ $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{0^+} f$.

$\boxed{15}$ $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{0^+} f$.

$\boxed{16}$ $f(x)=\dfrac{\sin 3x}{x}$; $\lim\limits_{0} f$.

$\boxed{17}$ $f(x)=\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; $\lim\limits_{0} f$.

$\boxed{18}$ $f(x)=\dfrac{\cos x-\frac{1}{2}}{x-\frac{\pi}{3}}$; $\lim\limits_{\frac{\pi}{3}} f$. On pourra utiliser un taux de variation.

$\boxed{19}$ $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$; $\lim\limits_{0^+} f$ et $\lim\limits_{0^-} f$.

$\boxed{20}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=x+\dfrac{1}{2}$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

Quelques aides

$\boxed{1}$ Quantité conjuguée.

$\boxed{2}$ Quantité conjuguée et factorisation.

$\boxed{3}$ Quantité conjuguée.

$\boxed{4}$ Factorisation.

$\boxed{5}$ Factorisation.

$\boxed{6}$ Factorisation.

$\boxed{7}$ Factorisation.

$\boxed{8}$ Factorisation.

$\boxed{9}$ Changement de variable.

$\boxed{10}$ Ecriture en un seul logarithme népérien.

$\boxed{11}$ Changement de variable.

$\boxed{12}$ Changement de variable.

$\boxed{13}$ Factorisation.

$\boxed{14}$ Elimination de la racine au dénominateur puis changement de variable.

$\boxed{15}$ Changement de variable.

$\boxed{16}$ Changement de variable.

$\boxed{17}$ Autre écriture du numérateur.

$\boxed{18}$ Taux de variation.

$\boxed{19}$ Ecriture en produit.

$\boxed{20}$ 2°) Quantité conjuguée.

Consigne générale de présentation : tirer les traits de fractions à la règle.

Réponses

1 $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Solution détaillée :

• **En + ∞,** on effectue une réécriture $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$ (tirer le trait de fraction à la règle)

On utilise la limite d'un quotient.

On peut écrire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right) = +\infty$ en une seule étape (inutile de détailler)

Commentaire :

On fait un « quotient ». On simplifie. Ça permet de faire disparaître le x au numérateur qui nous gêne.

• **En – ∞,** on utilise l'écriture de base (inutile d'effectuer une réécriture).
On utilise la limite d'une somme (ou d'une différence).

Solution un peu plus détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{4x^2+1} - 2x$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Limite en + ∞

On rencontre une FI du type « ∞ – ∞ ».

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\times\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} \qquad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$= \frac{\cancel{4x^2}+1-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Limite en – ∞

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty\end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2 $f(x)$ existe si et seulement si $x^2+2x \geq 0$

si et seulement si $x(x+2) \geq 0$

On fait un tableau de signes et on obtient $\mathcal{D}_f = \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left[0\,;+\infty\right[$.

(On peut aussi dire que $x(x+2)$ est un trinôme du second degré dont les racines 0 et – 2 ; on peut appliquer la règle du signe d'un trinôme du second degré).

Attention, ce qui fait la difficulté de cet exercice, c'est qu'on combine quantité conjuguée et factorisation.

$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}$ si $x > 0$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1}$.

Solution un peu plus détaillée :

$f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x} - x$

1°) Attention pour la recherche de l'ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2+2x \geq 0$

si et seulement si $x(x+2) \geq 0$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
SGN de x		–		–	0	+	
SGN de $x + 2$		–	0	+		+	
SGN de $x(x + 2)$		+	0	–	0	+	

$\mathcal{D}_f = \left]-\infty\,;-2\right] \cup \left[0\,;+\infty\right[$

2°) En + ∞, on rencontre une FI du type « ∞ – ∞ ».

On effectue une réécriture.

$$\forall x>0 \quad f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+x} \qquad \text{(quantité conjuguée)}$$

$$=\frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)}+x} \qquad \text{(factorisation sous la racine)}$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2x}{|\,x\,|\times\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}$$

$$=\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)=2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

$\boxed{3}$ $\boldsymbol{D}_f=\left[-\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$; $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}$ (tirer les traits de fraction à la règle) ; $\boxed{\lim\limits_{1} f=-\frac{1}{2\sqrt{3}}}$

Solution détaillée :

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}}{x-1}$$

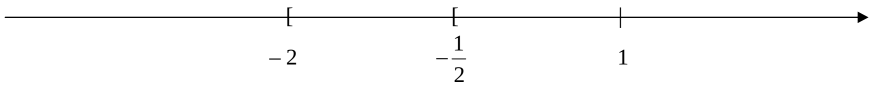
Ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x-1\neq 0 \\ x+2\geq 0 \\ 2x+1\geq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\geq -2 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ (on a réduit au maximum le système de conditions)

Il n'est pas obligatoire de tracer la droite réelle ci-dessous mais la droite est une aide visuelle (la droite est très pratique pour visualiser).



Donc : $\boldsymbol{D}_f=\left[-\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$.

Limite de *f* en 1

On rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ ».

On effectue une réécriture (quantité conjuguée).

$$\forall x\in\boldsymbol{D}_f \quad f(x)=\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2x+1}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$=\frac{x+2-(2x+1)}{(x-1)\times\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$=\frac{-x+1}{(x-1)\times\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+1}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

$\boxed{4}$ $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\,;1\}$; $f(x)=\dfrac{x+5}{x+1}$; $\boxed{\lim\limits_{1} f=3}$.

Solution détaillée :

$f: x \mapsto \dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

Ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2-1\neq 0$

si et seulement si $x^2\neq 1$

si et seulement si $x\neq 1$ ou $x\neq -1$

Donc : $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{\,1\,;-1\}$.

Limite de *f* en 1

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+4x-5\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right\}$ donc on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On procède à une réécriture (factorisation).

Les racines du polynôme x^2+4x-5 sont 1 et – 5 (on utilise la racine 1 comme racine évidente puis le produit des racines pour trouver – 5 ou bien on utilise le discriminant qui est égal à $\Delta = 36$).

$\forall x\in \boldsymbol{D}_f \quad f(x)=\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$

$=\dfrac{x+5}{x+1}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1}(x+5)=6\\ \lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\dfrac{6}{2}=3$.

$\boxed{5}$ $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}_+$; f n'est pas une fonction rationnelle (c'est une fonction irrationnelle à cause de la racine carrée) ;

$f(x)=\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x^2}}$ si $x>0$; $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f=0}$.

Une aide pour la transformation d'écriture : $\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}\times\cancel{\sqrt{x}}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Solution détaillée :

$f: x\mapsto \dfrac{x+\sqrt{x}}{x^2+1}$

Ensemble de définition

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2+1\neq 0\end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases}x\geq 0\\ x^2\neq -1 \quad \text{toujours vrai}\end{cases}$

Donc : $\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}_+$

Limite de *f* en + ∞

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x}\right)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty\end{array}\right\}$ donc on rencontre une FI du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On procède à une réécriture (factorisation).

$\forall x>0 \quad f(x)=\dfrac{\cancel{x}\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)}{\cancel{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$

$=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{x+\dfrac{1}{x}}$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

$\boxed{6}$ $\mathcal{D}_f=[-4\,;+\infty[$; $f(x)=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-\sqrt{x}\right)$ si $x>0$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$ (« $(-\infty)\times(+\infty)$ » ce n'est pas une FI ; ça fait $-\infty$).

$\boxed{7}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$; $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$ si $x>0$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$.

$\boxed{8}$ $\mathcal{D}_f=]-1\,;+\infty[$; $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\dfrac{x}{\sqrt{x}\times\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{x}}{\cancel{\sqrt{x}}\times\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\sqrt{\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}}$ (on observera que la séparation des racines est bien licite car les deux facteurs x et $1+\frac{1}{x}$ sont positifs pour $x>0$) ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\boxed{9}$ $\mathcal{D}_f=]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$ (il faut faire un tableau de signes) ; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$.

$\boxed{10}$ $\mathcal{D}_f=]-1\,;+\infty[$; $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ln 2}$ (limite d'une composée).

$\boxed{11}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ (avec changement de variable) et $\lim\limits_{0^-} f=0$ (directement, sans changement de variable)

Solution détaillée :

$f : x\mapsto x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Limite de *f* en 0 $^+$

Quand $x\to0^+$, on rencontre une FI du type « $0\times\infty$ ».

On utilise le changement de variable $X=\dfrac{1}{x}$.

$(x\to0^+)\Leftrightarrow(X\to+\infty)$

$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}$; $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}=+\infty$ (limite de référence) donc $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty}$

Limite de *f* en 0 $^-$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-} x=0\\ \lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0\ \text{(limite d'une composée}^*\text{)}\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=0}$.

Détail de $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$:

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^-}\underbrace{\frac{1}{x}}_{X}=-\infty\\ \lim\limits_{X\to-\infty}\mathrm{e}^X=0\end{array}\right\}$ donc par limite d'une composée : $\lim\limits_{x\to0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$

$\boxed{12}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$; quand $x\to0^+$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; on pose $X=2x\Leftrightarrow x=\frac{X}{2}$; $(x\to0)\Leftrightarrow(X\to0)$; $f(x)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{\mathrm{e}^X-1}{X}$; on utilise $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\mathrm{e}^X-1}{X}=1$ (limite de référence) ; on trouve : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{2}{5}}$.

Autre méthode : écrire $f(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+1)}{5x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\times\dfrac{\mathrm{e}^x+1}{5}$.

$\boxed{13}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$; quand $x\to0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; réécriture : $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{5}\times\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$; on utilise $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$ (limite de référence) ; on obtient : $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=\frac{1}{5}}$.

$\boxed{14}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}_+^*$; quand $x\to0^+$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; réécriture : $f(x)=\sqrt{x}\left(\mathrm{e}^x+1\right)\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$;

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}=0\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\mathrm{e}^x+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=1\ \text{(limite de référence)}\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0}$.

$\boxed{15}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}_+^*$; quand $x\to0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; changement de variable : $X=\sqrt{x}$; $(x\to0^+)\Leftrightarrow(X\to0^+)$; $f(x)=\dfrac{\sin X}{X}$; $\lim\limits_{X\to0^+}\dfrac{\sin X}{X}=1$ (limite référence) de donc $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1$; $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1}$.

$\boxed{16}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$; quand $x\to0$, on rencontre une FI du type « $\frac{0}{0}$ » ; changement de variable $X=3x$; $(x\to0)\Leftrightarrow(X\to0)$; réécriture : $f(x)=3\dfrac{\sin X}{X}$; $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X}=1$ (limite de référence) ; $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=3}$; attention, $\sin3x\neq3\sin x$. On peut retenir les formules suivantes :
$\cos3x=4\cos^3x-3\cos x$ et $\sin3x=3\sin x-4\sin^3x$ (démonstration : écrire que $\cos(3x)=\cos(2x+x)$ puis utiliser les formules d'addition puis de duplication)

$\boxed{17}$ $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}^*$; $f(x)=\dfrac{1-\left(1-2\sin^2x\right)}{x^2}=\dfrac{2\sin^2x}{x^2}=2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$; $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x)=2}$ (rappel de formules de trigonométrie à savoir par cœur avec les formules de duplication du cosinus
$\cos2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x=\cos^2x-\sin^2x$)

18 **Solution détaillée :**

$f : x \mapsto \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$

$f(x)$ existe si et seulement si $x - \dfrac{\pi}{3} \neq 0$

si et seulement si $x \neq \dfrac{\pi}{3}$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{3} \right\}$; quand $x \to 0$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ » ; limite par taux de variation.

$f(x) = \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$; on considère la fonction $u : x \mapsto \cos x$.

$f(x) = \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{u(x) - u\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}$;

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier elle est dérivable en $\dfrac{\pi}{3}$ donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} f(x) = u'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Rappel à détailler :

Lorsque u est dérivable en a, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{u(x) - u(a)}{x - a} = u'(a)$ (définition du nombre dérivé).

Donc $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} f(x) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

19 $\boldsymbol{D}_f =]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$; quand $x \to 0^+$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ » ; on effectue le changement d'écriture : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$; on utilise $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite de référence) et on trouve $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$; de même, on trouve : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty}$.

Solution détaillée :

$f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 1 + x > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

$\boldsymbol{D}_f =]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

(Attention à bien analyser les types de problèmes qui se posent : le dénominateur ne doit pas être nul, ce qui est à l'intérieur du ln doit être positif ou nul.)

Limite en 0^+ :

Quand $x \to 0^+$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On effectue le changement d'écriture : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{(limite de référence)} \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Limite en 0^- :

Quand $x \to 0^-$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

On effectue le changement d'écriture : $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \times \dfrac{1}{x}$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{(limite de référence)} \end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty}$.

20 $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$

Solution détaillée :

1°) $f(x)$ existe si et seulement si $x^2 + x + 1 \geq 0$.

Considérons le polynôme $x^2 + x + 1$.
Son discriminant est égal à $\Delta = -3$.
$\Delta < 0$.
Par conséquent, le polynôme est toujours strictement positif $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 + x + 1 > 0$.

☐ **Logique :** il n'est pas nécessaire de dire que le polynôme n'admet pas de racines dans $\mathbb{R}$.

Donc $\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}$.

2°) Démontrons que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = x + \frac{1}{2}$ pour asymptote oblique en $+\infty$.

N.B. : ne pas écrire $f(x) - y$ où y est sensé remplacer $x + \frac{1}{2}$.

Les traits de fraction et de racines carrées doivent être faits à la règle.
Les calculs sont assez longs. Il faut faire preuve de persévérance !

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)}{1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]\left[\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]}{1 \times \left[\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x^2 + x + 1}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1 - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}\right) = 0$.

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 0$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = x + \frac{1}{2}$ pour asymptote oblique en $+\infty$.