Exercices sur les courbes en coordonnées polaires dans le plan

1 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \sin 2\theta$.

1°) Déterminer les symétries de $\mathcal{C}$; en déduire un domaine d'étude.
2°) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$.
3°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.

2 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(2\theta)$.

1°) a) Déterminer les symétries de $\mathcal{C}$; en déduire un domaine d'étude.
b) Etudier la courbe $\mathcal{C}$.
2°) Construire $\mathcal{C}$ et la placer par rapport aux deux cercles d'équations polaires $\rho = 2\cos 2\theta$ et $\rho = -2\cos 2\theta$.
3°) Déterminer les points où les tangentes sont parallèles à l'axe des abscisses.
4°) Déterminer une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{C}$.

3 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \dfrac{1}{\cos^2(2\theta)}$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition et un domaine d'étude utile pour l'étude de $\mathcal{C}$. Préciser les symétries éventuelles.

2°) On donne le tableau de variation sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right[$.

θ	0	$\frac{\pi}{4}$
ρ'	0 $\quad +$	
ρ	$1 \nearrow$	$+\infty$

a) Etudier la branche infinie de $\mathcal{C}$ quand θ tend vers $\frac{\pi}{4}$.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

4 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire

$\rho = \dfrac{a}{\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta}}$ où a est un réel strictement positif.

Indication : développer $(\cos\theta + \sin\theta)^2$ et $(\cos\theta - \sin\theta)^2$.

5 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, tracer la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire

$\rho = \dfrac{a}{1+\cos\theta}$ où a est un réel strictement positif.

1°) Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ et les éléments caractéristiques de $\mathcal{C}$.
2°) Tracer $\mathcal{C}$.

6 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \cos^3 \dfrac{\theta}{3}$

1°) Déterminer les symétries de $\mathcal{C}$; en déduire un domaine d'étude.
2°) Etudier et tracer la courbe $\mathcal{C}$.
3°) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale et en lesquels la tangente est verticale.

7 **La strophoïde droite**

Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit E un point fixé de]Ox) et F un point mobile de l'axe (Oy).
On note M et N les points de la droite (EF) tels que $FM = FN = FO$. On pose $a = OE$ $(a > 0)$.

1°) Soit θ la mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ telle que $0 < \theta < \pi$.

- Déterminer une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{FM}\right)$.
- En déduire OF en fonction de a et de θ.
- En déduire OM en fonction de a et de θ.
- Démontrer que le lieu des points M et N est la courbe Γ d'équation polaire $\rho = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

2°) Etudier et tracer Γ.
3°) Déterminer une équation cartésienne de Γ.

Remarque historique :
Cette courbe fut sans doute étudiée pour la première fois au XVII^{e} siècle par Roberval (1645). On l'appelait alors « ptéroïde ».

8 Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R et A un point fixé de $\mathcal{C}$. Pour tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A, on note P le point d'intersection de (AM) et de la perpendiculaire en O à (OM).
Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble Γ des points P lorsque M décrit $\mathcal{C} \setminus \{A\}$.
On oriente le plan et on note θ une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$.

1°) Déterminer une mesure ne radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}\right)$ puis de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PO}\right)$.

2°) En déduire une équation polaire de Γ dans le repère polaire $\left(O, \vec{i}\right)$ avec $\vec{i} = \dfrac{1}{OA}\overrightarrow{OA}$.

3°) Etudier et tracer Γ.

9 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \tan\dfrac{\theta}{2}$ $(\theta \in]-\pi\,;\pi[)$.

1°) Etudier $\mathcal{C}$.
2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point double et que les deux tangentes en ce point sont orthogonales.
3°) Déterminer les points où la tangente est horizontale.
Démontrer qu'ils sont situés sur la deuxième bissectrice.
4°) Déterminer une paramétrisation rationnelle de $\mathcal{C}$.

10 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\sin \theta}$.

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$.

b) Etudier l'axe ou les axes de symétries de $\mathcal{C}$; en déduire un domaine d'étude.
Faire l'étude correspondante.

c) Déterminer $\lim\limits_{\theta \to 0} (\rho \sin \theta)$. Que peut-on en déduire ?

d) Tracer $\mathcal{C}$.

2°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ associé à $\dfrac{\pi}{2}$ et M un point de $\mathcal{C}$ associé à $\theta \in \mathcal{D}$.

a) Calculer les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{AM}$; en déduire une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$ en fonction de θ.

b) Soit M' le point de $\mathcal{C}$ associé à $\theta + \dfrac{\pi}{2}$.

Démontrer que les points A, M, M' sont alignés et démontrer que le produit scalaire $p = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AM'}$ est constant.

11 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie A

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Compléter le tableau.

Condition	Conséquences graphiques (symétrie)
$f(-\theta) = f(\theta)$	
$f(-\theta) = -f(\theta)$	
$f(\theta+\pi) = f(\theta)$	
$f(\pi-\theta) = f(\theta)$	

Partie B

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \sin 2\theta$.
Faire apparaître la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran d'une calculatrice graphique (se placer en mode polaires).
Justifier les symétries de $\mathcal{C}$.

12 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = \cos\theta - \cos 2\theta$.

1°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ est incluse dans le disque de centre O et de rayon 2.

2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet un axe de symétrie.

3°) Résoudre l'équation $\rho = 0$; en déduire le signe de ρ suivant les valeurs de θ pour $\theta \in [0\,;\pi]$.

4°) Calculer ρ'.

5°) Déterminer la tangente aux points de paramètres 0 ; $\dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; π.

6°) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

7°) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est horizontale et en lesquels la tangente est verticale.

13 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ avec $f(\theta) = \tan\dfrac{\theta}{2} - 1$.

1°) Démontrer qu'il suffit de limiter à θ appartenant à l'intervalle $I = \left]-\pi\,;\pi\right[$.

2°) Résoudre les inéquations et l'équation suivante dans I : $\tan\dfrac{\theta}{2} - 1 > 0$; $\tan\dfrac{\theta}{2} - 1 < 0$; $\tan\dfrac{\theta}{2} - 1 = 0$.

En déduire le tableau de signes de $f(\theta)$ pour $\theta \in I$.

3°) Déterminer $\lim\limits_{\theta \to \pi^-} f(\theta)$ et $\lim\limits_{\theta \to (-\pi)^+} f(\theta)$.

On note $x(\theta)$ et $y(\theta)$ les coordonnées cartésiennes du point M(θ) de $\mathcal{C}$.

Déterminer les limites de $x(\theta)$ et de $y(\theta)$ quand $\theta \to \pi^-$ puis quand $\theta \to \pi^+$.

En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ dont on donnera une équation.

4°) Déterminer les points M(0) et $M\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ainsi que la tangente en ces points.

5°) Tracé de $\mathcal{C}$.

a) Tracer la droite Δ.

b) Placer les points M(0) et $M\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ ainsi que les tangentes en ces points.

c) Tracer la tangente au passage au pôle.

d) Tracer la partie de la courbe pour $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right[$, pour $\theta \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, pour $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$ puis pour $\theta \in \left]-\pi\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$.

6°) Le tracé de la courbe $\mathcal{C}$ fait apparaître un point double A.

a) Déterminer un système de coordonnées polaires puis les coordonnées cartésiennes de ce point A.

b) Démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en ce point sont orthogonales.

Indication : on donne $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ et $\tan\dfrac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$.

14 Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ avec $f(\theta) = 1 + \tan\theta$.

1°) Démontrer qu'il suffit de limiter l'étude à θ appartenant à l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2°) Résoudre les inéquations et l'équation suivante dans I : $1 + \tan\theta > 0$; $1 + \tan\theta < 0$; $1 + \tan\theta = 0$.

En déduire le tableau de signes de $f(\theta)$ pour $\theta \in I$.

3°) Déterminer $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} f(\theta)$ et $\lim\limits_{\theta \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(\theta)$.

On note $x(\theta)$ et $y(\theta)$ les coordonnées cartésiennes du point M(θ) de $\mathcal{C}$.

Déterminer les limites de $x(\theta)$ et de $y(\theta)$ quand $\theta \to \dfrac{\pi}{2}^-$ puis quand $\theta \to \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^+$.

En déduire que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes Δ et Δ' dont on donnera des équations.

4°) a) Déterminer la tangente au point M(0).

b) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente verticale au point $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5°) Tracé de $\mathcal{C}$.

a) Tracer les droites Δ et Δ'.

b) Placer les points M(0) et $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$; tracer les tangentes en ces points.

c) Tracer la tangente au passage au pôle.
d) Tracer la courbe **C**.

$\boxed{15}$ Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe **C** d'équation polaire $\rho(\theta)=\frac{1}{2}-\cos 4\theta$.

1°) Démontrer que la courbe **C** est incluse dans le disque de centre O et de rayon $\frac{3}{2}$.

2°) Démontrer que ρ est périodique ; en déduire que **C** est globalement invariante par la rotation $R_{\left(\mathrm{O};\frac{\pi}{2}\right)}$.

3°) Démontrer que **C** admet un axe de symétrie.

4°) Déduire des questions précédentes qu'il est possible de limiter l'étude à l'intervalle $\mathrm{I}=\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

Calculer $\rho'(\theta)$; dresser le tableau de variation de ρ sur I.

5°) Résoudre l'équation : $\rho=0$; en déduire le signe de ρ suivant les valeurs de θ pour $\theta\in\mathrm{I}$.
6°) Tracer la courbe **C** sur I puis compléter.

$\boxed{15}$ Etudier et tracer la courbe d'équation polaire $\rho(\theta)=\cos 2\theta+\cos^2\theta$.

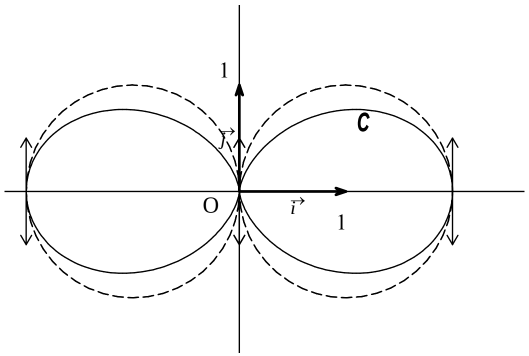
Réponses

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ Période π

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ S_{O}

$\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ $S_{\mathrm{O}x}$

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\rho(\theta)$	2 ↘	1	0
$\rho'(\theta)$	0	–	0



$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}\theta}=\rho'\vec{u}+\rho\vec{v}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=(1+\cos 2\theta)\left(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2\cos^2\theta\left(\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=2\cos^2\theta\,\vec{i}+2\cos^2\theta\sin\theta\,\vec{j}$$

2°) $\tan v=\frac{\rho}{\rho'}=-\frac{1+\cos 2\theta}{2\sin(2\theta)}=-\frac{\cancel{2}\cos^2\theta}{2\times\cancel{2}\sin\theta\times\cos\theta}=-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}$

$x(\theta)=2\cos^2\theta$

$x'(\theta)=-2\cos\theta\sin\theta$

$y(\theta)=2\cos^2\theta\sin\theta$

$y'(\theta)=-2\cos\theta\sin\theta\times\sin\theta+2\cos^2\theta\times\cos\theta=2\cos\theta\left(\cos^2\theta-2\sin^2\theta\right)=2\cos\theta\left(1-3\sin^2\theta\right)$

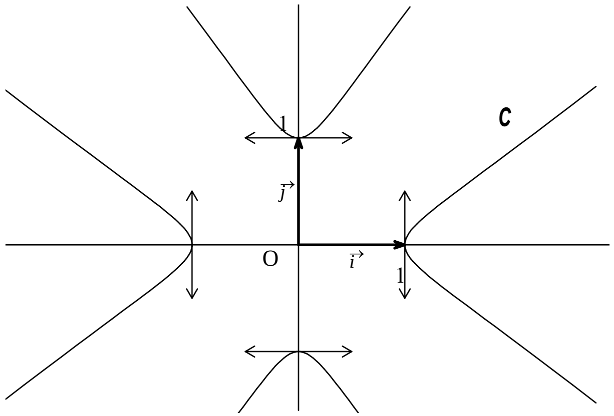
3°) $\rho=2\times\left(\frac{x}{\rho}\right)^2$

$\rho^3=2x^2$
$\rho^6=4x^4$
$\left(x^2+y^2\right)^3=4x^4$

4°)

$\boxed{3}$ 2°) a) La courbe **C** admet seulement une direction asymptotique de direction $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Tracé de la courbe



$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ 3°) $x\left(x^2+y^2\right)=a\left(x^2-y^2\right)$ $\boxed{7}$ **Rappel**

$\boxed{10}$ **Strophoïde droite** $\rho=\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$.

1°) a) $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$

b) π est anti-période : la courbe est entièrement décrite sur un intervalles d'amplitude π par exemple [0 ; π].

$\theta\to\pi-\theta \quad \rho\to\rho$

Symétrie par rapport à l'axe (Oy)

Etude sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$

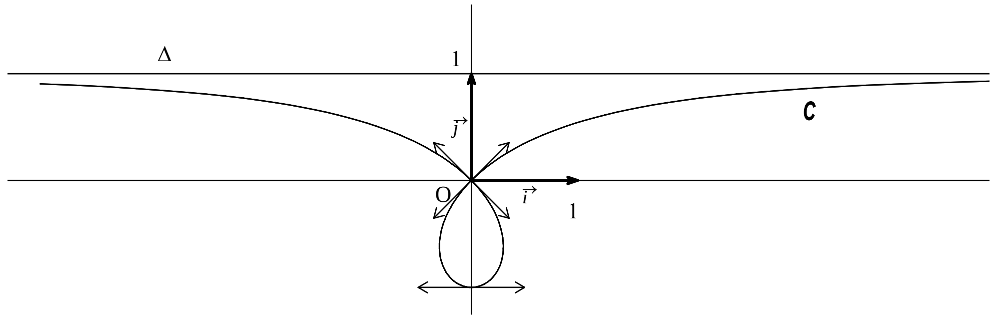
θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	$\Vert$ $+\infty$	$+$	0	$-$	-1

c) Branche infinie en $\theta=0$

$\rho\sin\theta=\cos 2\theta \;\to\; 1$.

La droite d'équation $y=1$ est asymptote.

d)



2°) A$\begin{vmatrix}0\\-1\end{vmatrix}$ et M$\begin{vmatrix}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos 2\theta\\ \cos 2\theta\end{vmatrix}$

$\overrightarrow{\text{AM}}\begin{vmatrix}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos 2\theta\\ \cos 2\theta+1=\cos^2\theta\end{vmatrix}$

Si $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$, $\overrightarrow{\text{AM}}$ est colinéaire à $\vec{u}\begin{vmatrix}\dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}\\ 2\cos\theta\end{vmatrix}$

Comme $\theta\neq 0$, $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}\begin{vmatrix}\cos 2\theta\\ 2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta\end{vmatrix}$

D'où $\left(\vec{i},\overrightarrow{\text{AM}}\right)=2\theta+2k\pi$ relation non valable en $\dfrac{\pi}{2}$ (M = A).

b) $\theta'=\theta+\dfrac{\pi}{2}$

$\left(\vec{i},\overrightarrow{\text{AM}}\right)=2\theta+2k\pi$

$\left(\vec{i},\overrightarrow{\text{AM}'}\right)=2\theta+\pi+2k\pi$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{\text{AM}}$ et $\overrightarrow{\text{AM}'}$ colinéaires.

$2\theta'=2\theta+\pi$

$$\frac{\cos\left[2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=-\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$$

$\overrightarrow{\text{AM}}\begin{vmatrix}\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos 2\theta\\ \cos 2\theta+1\end{vmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\text{AM}'}\begin{vmatrix}\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos 2\theta\\ -\cos 2\theta+1\end{vmatrix}$

$p = \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AM'} = \cos^2 2\theta + 1 - \cos^2 2\theta = 1$

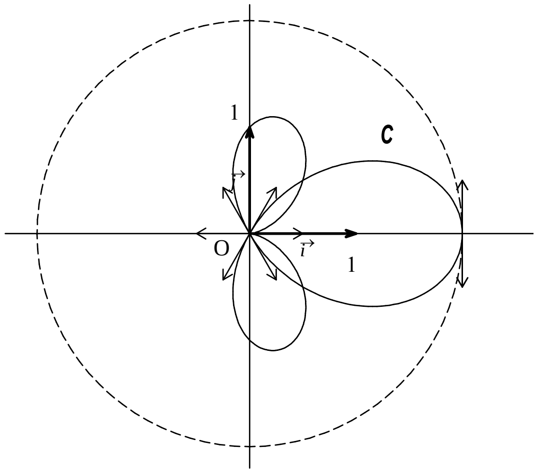
$\boxed{11}$ **Partie B** $\rho(\pi-\theta) = -\rho(\theta)$ $\quad S_{(Ox)}$; $\rho(\pi+\theta) = \rho(\theta)$ $\quad S_O$; $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ $\quad S_{(Oy)}$; $\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \rho(\theta)$

S_Δ avec $\Delta : y = x$

$\boxed{12}$ 3°) $\rho > 0$ pour $\theta \in \left[0\,;\frac{2\pi}{3}\right[$; $\rho = 0$ pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$; $\rho < 0$ pour $\theta \in \left]\frac{2\pi}{3}\,;\pi\right]$.

4°) $\rho'(\theta) = \sin\theta(4\cos\theta - 1)$

5°) $\rho'(0) = 0$, $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\rho'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\rho'(\pi) = 0$



$\boxed{13}$ 6°) a) $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$

$\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - 1 = -\tan\frac{\theta}{2} + 1$

$-\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}} - 1 = -\tan\frac{\theta}{2} + 1$

$\tan^2\frac{\theta}{2} - 2\tan\frac{\theta}{2} - 1 = 0$

donc $\tan\frac{\theta}{2} = 1+\sqrt{2}$ ou $\tan\frac{\theta}{2} = 1-\sqrt{2}$.

Grâce aux valeurs rappelées dans l'énoncé, on trouve donc

$\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ donc $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{8} + k\pi$ donc $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

b) $\rho'(\theta) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)$

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \rho'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\vec{u}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \rho\left(-\frac{\pi}{4}\right)\vec{v}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rho'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right) = 2-\sqrt{2}$$

$$\rho\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) - 1 = -\sqrt{2}$$

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(2-\sqrt{2}\right)\vec{u}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,\vec{v}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

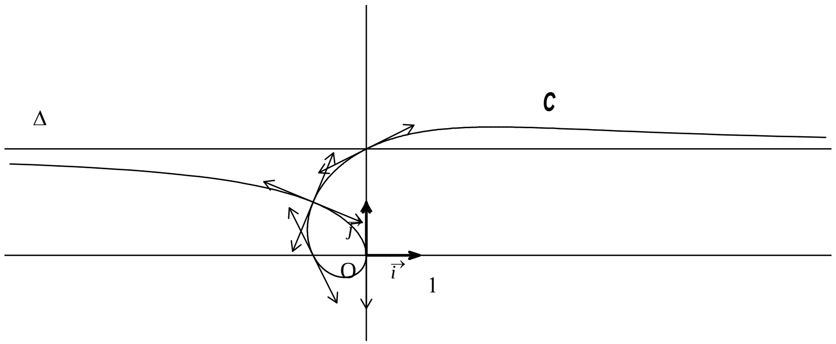
$$\rho'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right) = 2+\sqrt{2}$$

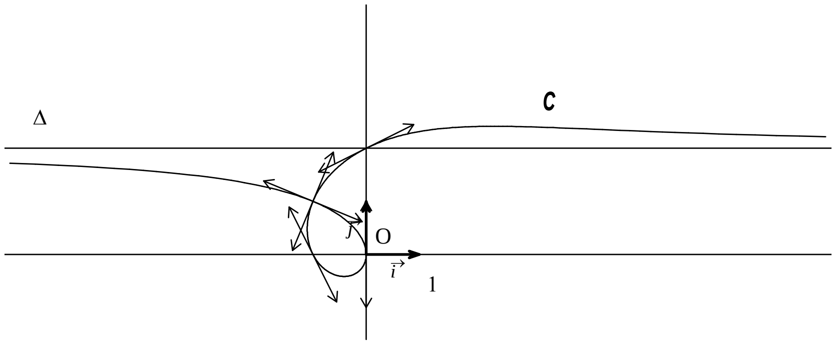
$$\rho\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) - 1 = \sqrt{2}$$

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(2+\sqrt{2}\right)\vec{u}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\,\vec{v}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

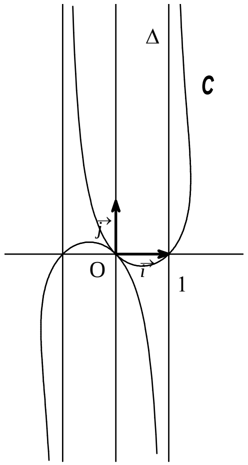
$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\left(2+\sqrt{2}\right)\vec{u}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\,\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \bullet \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2 = -2+2 = 0$$





13 Courbe



15 ρ est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et elle est définie sur $\mathbb{R}$. La courbe est obtenue complètement lorsque θ parcourt un intervalle de longueur 2π, et elle est invariante par la rotation R, de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Si l'on veut commencer par utiliser la parité de la fonction, on prend l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}\right]$.

La courbe est symétrique par rapport à O*x*.

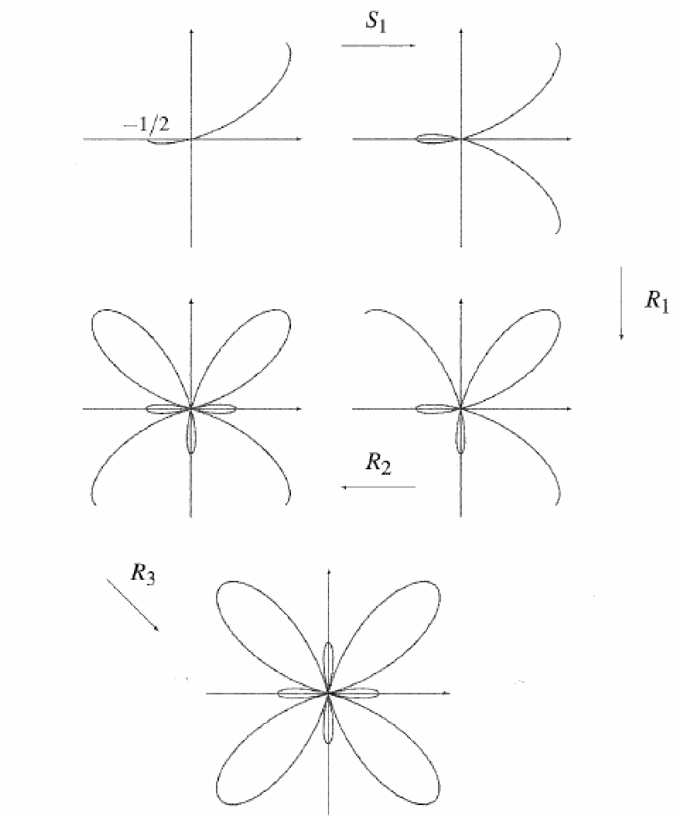
On l'étudie sur $I_1 = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, et on complètera par la symétrie S_1 par rapport à O*x*.

On a $\rho'(\theta) = 4 \sin 4\theta$. Dans I_1, la dérivée s'annule en 0 et $\frac{\pi}{4}$. Et ρ s'annule en $\frac{\pi}{12}$.

On a le tableau de variation suivant :

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$
ρ'	0	+	0
ρ	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$

On trace l'arc de courbe obtenu lorsque (θ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$), puis on complète par la symétrie S_1, et, à cet arc de courbe, on fait subir trois rotations, pour reconstituer complètement la courbe.



Questions de cours

$\boxed{1}$ Vecteur vitesse ; vecteur accélération en coordonnées polaires.

$\boxed{2}$ Tangente à une courbe définie par une équation polaire.

$\boxed{3}$ Notion d'équation polaire.

$\boxed{4}$ Asymptotes en coordonnées polaires.

$\boxed{5}$ Parité et périodicité : conséquences dans l'étude d'une courbe définie par une équation polaire.

$\boxed{6}$ Dans le plan orienté *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée définie par $f(\theta) = O + \rho(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ où ρ est une fonction de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Calculer $f'(\theta)$ et $f''(\theta)$ (expressions dans la base $\left(\overrightarrow{e_\theta} ; \overrightarrow{e_{\theta+\frac{\pi}{2}}}\right)$).

Calculer $\det\left(f'(\theta), f''(\theta)\right)$ en fonction de ρ, ρ' et ρ".
Donner une interprétation du signe de ce nombre.

$\boxed{7}$ Dans le plan orienté *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée définie par $f(\theta) = O + \rho(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ où ρ est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On suppose que $\rho(\theta_0) = 0$ où $\theta_0 \in I$.
Quelle est la tangente au point M_0 associé à θ_0 ? Justifier.

$\boxed{8}$ Donner la définition d'un cercle asymptote.

$\boxed{9}$ **Règle du secteur angulaire**
Dans le plan orienté *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée définie par $f(\theta) = O + \rho(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ où ρ est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}$ son support.

On suppose que pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$, on a : $\rho(\theta) \geq 0$.
Faire une figure précisant dans quel secteur angulaire se trouve la courbe $\mathcal{C}$.

On suppose que pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$, on a : $\rho(\theta) \leq 0$.
Faire une figure précisant dans quel secteur angulaire se trouve la courbe $\mathcal{C}$.

$\boxed{10}$ Dans le plan orienté *P* muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée définie par $f(\theta) = O + \rho(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$ où ρ est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On note M le point associé à q.
Calculer $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}$ (expression dans la base $\left(\overrightarrow{e_\theta} ; \overrightarrow{e_{\theta+\frac{\pi}{2}}}\right)$).
En déduire que le seul point singulier possible est le pôle.

$\boxed{11}$ Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée définie par $f(\theta) = O + \rho(\theta)\overrightarrow{e_\theta}$. On note $\mathcal{C}$ son support.

On suppose que pour tout réel $\theta \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\rho(\theta) \geq 0$.
Dans quelle zone du plan, se situe la courbe $\mathcal{C}$?

Faire une figure avec Sinequanon.

La courbe se situe dans le premier quadrant.