Exercices sur les courbes paramétrées dans le plan

1 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2-1} \\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$.

1°) Etudier les variations de x et y.
Donner dans un même tableau
- le signe de x' et y' ;
- les variations de x et y.

1°) Etudier les variations de x et de y.
2°) Etudier le point stationnaire c'est-à-dire déterminer la tangente en ce point.
On notera que ce point est un point de rebroussement de 1ère espèce.
3°) Déterminer $\lim\limits_{t\to1}\left[x(t)-y(t)\right]$; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
4°) Tracé de $\mathcal{C}$
Mettre en place les éléments du tracé.
Tracer $\mathcal{C}$.

2 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t)=\cos t \\ y(t)=\sin 2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

1°) Pour t réel quelconque,
- comparer les points M(t) et M($t+2\pi$) ;
- comparer les points M(t) et M($t+\pi$) ;
- comparer les points M(t) et M($-t$) ;
- comparer les points M(t) et M($\pi-t$).

En déduire que l'on peut prendre l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ pour intervalle d'étude.

2°) Étudier les variations de x et y.
Donner dans un même tableau
- le signe de x' et y' ;
- les variations de x et y.

3°) Donner les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ pour $t\in\mathcal{D}$ en lesquels
- la tangente est horizontale ;
- la tangente est verticale.

4°) Tracer $\mathcal{C}$. Vérifier sur la calculatrice graphique. Tracer les tangentes en O.

3 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t)=\cos(3t) \\ y(t)=\cos t+\sin t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

Etudier et tracer $\mathcal{C}$.
On étudiera en particulier les points multiples.

4 **Partie A (questions préliminaires)**
1°) Démontrer que, pour tout réel t, on a : $\mathrm{th}\, t<t$.
2°) Démontrer que l'équation $\coth t=t$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}_+^*$.

Partie B (étude d'une courbe paramétrée)

Dans le plan orienté P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t)=\dfrac{\mathrm{sh}\, t}{t} \\ y(t)=\dfrac{\mathrm{ch}\, t}{t} \end{cases}$.

1°) Préciser les symétries de $\mathcal{C}$; donner un domaine d'étude $\mathcal{D}$.
2°) Étudier les variations de x et y.
Donner dans un même tableau
- le signe de x' et y'
- les variations de x et y.

Mettre les limites. On admettra que $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\mathrm{sh}\, t}{t}=1$.
3°) Donner les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ pour $t\in\mathcal{D}$ en lesquels la tangente est verticale.
4°) Étudier $\lim\limits_{t\to+\infty}\left[x(t)-y(t)\right]$.
Donner les asymptotes à $\mathcal{C}$.
5°) Tracer $\mathcal{C}$. Vérifier sur la calculatrice graphique. Étudier et tracer $\mathcal{C}$.

5 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t)=t-2\,\mathrm{th}\, t \\ y(t)=\dfrac{2}{\mathrm{ch}\, t} \end{cases}$.

Afficher la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran d'une calculatrice graphique (se mettre d'abord en mode paramétrique).

Le but de cet exercice est de justifier quelques propriétés de la courbe $\mathcal{C}$.

Justifier les éléments suivants :
1°) La courbe $\mathcal{C}$ est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses.
2°) La courbe $\mathcal{C}$ admet un axe de symétrie.
3°) La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées en un point.
4°) La courbe $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale.
5°) La courbe $\mathcal{C}$ admet deux tangentes verticales.
6°) La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote.
7°) Il n'y a aucun point stationnaire.

6 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-1}{t} \\ y(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)} \end{cases}$.

1°) Étudier les variations de x et y.
Donner dans un même tableau
- le signe de x' et y' ;
- les variations de x et y.

Calculer les extremums locaux (valeurs exactes).

2°) Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et $-\infty$; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

3°) Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers 1 ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

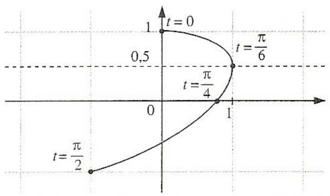
4°) Étudier $\lim\limits_{t \to 0}\left[x(t) - y(t)\right]$. En déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote.

5°) Vérifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe le point O ; préciser un vecteur directeur de la tangente.

6°) Tracer $\mathcal{C}$. Vérifier le tracé à l'aide de la calculatrice graphique.
7°) Le tracé de $\mathcal{C}$ fait apparaître un point multiple. Déterminer les coordonnées de ce point.

7 Dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon a ($a \in \mathbb{R}_+^*$).
Pour tout point M de $\mathcal{C}$, on note H et K ses projetés orthogonaux respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
On note également N le projeté orthogonal sur la droite (HK).
1°) a) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble Γ des points N en utilisant une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ (on commencera par déterminer une équation cartésienne de la droite (HK)).
b) Étudier et tracer Γ.
Cette courbe est appelée une astroïde.
2°) Soit P le projeté orthogonal de O sur (HK).
a) Déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble Γ' des points P ; en déduire une équation polaire de Γ'.
b) Étudier et tracer Γ'.

8 Dresser le tableau de variation de la courbe paramétrée suivante :



9 Esquisser une courbe paramétrée dont voici le tableau de variation (x et y sont des fonctions de classe C^1 sur [0 ; 2]) :

t	0		1		2
$x'(t)$	0	+	0	–	– 1
$x(t)$	0	↗	1	↘	– 2
$y(t)$	0	↗	1	↗	2
$y'(t)$	1	+	1	+	0

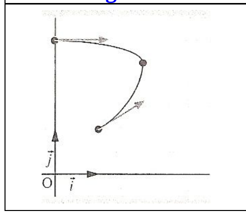
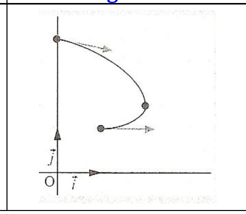
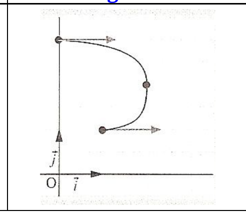
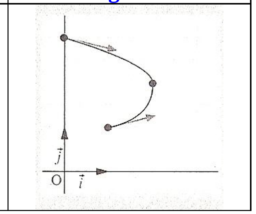
Tracer les tangentes ou demi-tangentes particulières.

10 Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée (I ; f) avec $\mathrm{I} = [0\,;2]$.
On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du point $f(t)$.

Les variations de x et y sont données dans le tableau suivant :

t	0		1		2
$x(t)$	0	↗	2	↘	1
$y(t)$	3		↘		1

Vérifier que chaque courbe a un tracé compatible avec ce tableau et lui associer le système de conditions correspondant.

Figure 1	**Figure 2**	**Figure 3**	**Figure 4**
			

a	**b**	**c**	**d**
$\begin{cases} x'(0) \neq 0 \\ y'(0) = 0 \\ x'(2) \neq 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x'(0) \neq 0 \\ y'(0) = 0 \\ x'(2) \neq 0 \\ y'(2) \neq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x'(0) \neq 0 \\ y'(0) \neq 0 \\ x'(2) \neq 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x'(0) \neq 0 \\ y'(0) \neq 0 \\ x'(2) \neq 0 \\ y'(2) \neq 0 \end{cases}$

11 Associer à chaque tableau de variation la courbe correspondante.

t	0		1
$x(t)$	1	$\nearrow$	3
$y(t)$	0	$\nearrow$	2

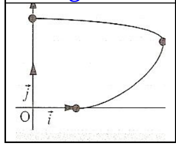
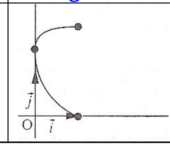
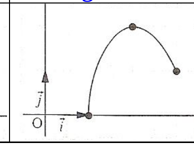
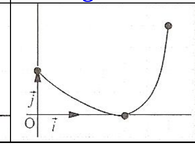
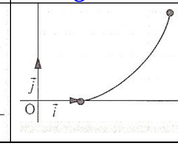
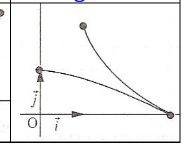
t	-1		0		5
$x(t)$	1		$\nearrow$		3
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$x(t)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0
$y(t)$	0		$\nearrow$		3

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x(t)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	0
$y(t)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

t	$-\pi$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x(t)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1
$y(t)$	2		$\searrow$		0

t	π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$x(t)$	3		$\searrow$		0
$y(t)$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Figure 1	Figure 2	Figure 3	Figure 4	Figure 5	Figure 6
					

12 Soit P le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe 1 et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) = 2z - z^2$.

On note F l'application de P dans lui-même qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $Z = f(z)$.

On prendra 3 cm pour unité de longueur.

Le but de ce problème est d'étudier l'image Γ du cercle $\mathcal{C}$ par F.

I. Soit m un point du cercle $\mathcal{C}$ d'affixe z et M son image par F.

Démontrer que A et M sont symétriques orthogonalement par rapport à la tangente T en m au cercle $\mathcal{C}$.

En déduire une construction de M à partir de m.

II. 1°) Démontrer que Γ est la courbe paramétrée : $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

2°) Démontrer que Γ admet l'un des axes du repère pour axe de symétrie.

Etudier sur l'intervalle $[0, \pi]$ les variations des fonctions x et y.

3°) a) Démontrer que si t est différent de 0, la tangente à Γ au point M de paramètre t est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(\cos\frac{3t}{2} ; \sin\frac{3t}{2}\right)$.

On admettra que ce résultat est encore valable quand t est nul.

b) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{mM}}$ est orthogonal à la tangente à Γ en M.

4°) Construire les points de Γ où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées.

5°) Tracer Γ.

13 Soit f l'application de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ pour tout z élément de $\mathbb{C}^*$.

1°) Calculer les parties réelle et imaginaire de $f(z)$ en fonction des module et argument de z.

2°) On note P le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit T l'application du plan P privé de l'origine O dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$. Quelle est la nature de l'image par T d'un cercle de centre O et de rayon R ?

On discutera suivant les valeurs de R.

14 Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note P^* le plan privé de O.

On considère l'application f de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ qui, à z, associe $f(z) = \frac{1}{z^2}$ et l'application F de P^* dans P^* qui, à tout point m d'affixe z, associe le point M d'affixe Z où $Z = f(z)$.

I. 1°) Déterminer les points invariants par F. Représenter ces points.

2°) Donner une construction géométrique de l'image par F d'un point m du cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

3°) Etant donné un point M du cercle $\mathcal{C}$, quel est l'ensemble des points m tels que F(m) = M ?

Construire ces points.

4°) a) Soit d une demi-droite de P, d'origine O.

Construire l'image par F de d^*, où d^* désigne d privée du point O.
Quelle est l'image par F d'une droite passant par O, mais privée de O ?
b) Etant donné, dans P, une droite Δ passant par O, quel est l'ensemble des points m tels que F(m) appartienne à Δ^*, où Δ^* désigne Δ privée de O ?

II. On considère l'ensemble γ des points de P^* dont l'affixe est $z = -2\cos^2\theta - 2i\sin\theta\cos\theta$ où θ décrit l'intervalle $\left]\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right[$.

1°) Démontrer que γ est inclus dans un cercle passant par O. Tracer γ.
2°) Donner, en fonction de θ, le module et un argument de l'affixe z d'un point m de γ.
Exprimer, en fonction de $\tan\theta$, les coordonnées X et Y de F(m).
En déduire l'équation de l'image Γ de γ par l'application F. Quelle est la nature de Γ ?
Vérifier que les points I et J de γ définis respectivement par $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $\theta = \frac{4\pi}{3}$ appartiennent à Γ.
En expliquer la raison.

15 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Partie A

On se propose de tracer le support $\mathcal{C}$ de la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x(t) = 2\cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2\sin t + \sin 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Démontrer que l'on passe du point de paramètre t au point de paramètre $t + \frac{2\pi}{3}$ par la rotation de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$.

2°) Démontrer que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0 ; \frac{2\pi}{3}[$.

3°) On appelle I et A les points correspondant respectivement à $t = 0$ et $t = \frac{2\pi}{3}$.

Construire la droite D tangente en I à $\mathcal{C}$.
On admettra que la tangente en A à $\mathcal{C}$ existe et passe par O. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

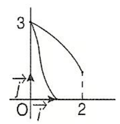
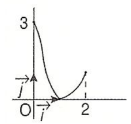
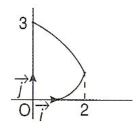
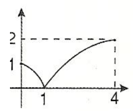
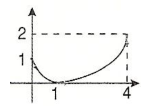
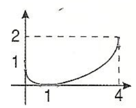
Partie B

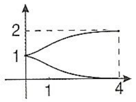
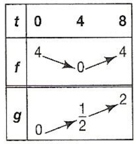
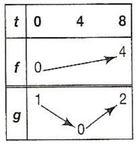
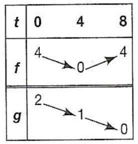
On appelle T l'application de P dans P, qui, au point m d'affixe z, associe le point M d'affixe $Z = 2z - z^2$.
1°) Démontrer que $\mathcal{C}$ est l'image de Γ par l'application T. Déterminer les points de Γ invariants par T et démontrer qu'en ces points, les courbes $\mathcal{C}$ et Γ ont même tangente.
2°) On suppose m appartenant à Γ.
Si m est invariant par T, on appelle D la tangente à Γ en m.
Si m n'est pas invariant par T, on appelle D la droite (mM).
Démontrer que, pour tout m de Γ, la droite D est tangente à $\mathcal{C}$ en M.
3°) Soit m un point de Γ, non invariant par T, dont l'affixe a pour argument t, et m' le point de Γ dont l'affixe a pour argument $-2t$.
Démontrer que $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{Om} - \overrightarrow{Om'}$.
Démontrer que la droite (mm') est tangente à $\mathcal{C}$ en M.
En déduire une construction simple de M et de la tangente à $\mathcal{C}$ en M, connaissant le point m sur Γ.

16 Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathcal{C}$ définie par les équations paramétriques $\begin{cases} x(t) = \sin 4t \\ y(t) = \cos 3t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Étudier les positions respectives des points M(t), M($-t$), M($\pi+t$) et M($\pi - t$). En déduire les éléments de symétrie de $\mathcal{C}$.

17 QCM

<table>
<tr><td>Une seule réponse proposée est exacte.</td><td>a</td><td>b</td><td>c</td></tr>
<tr><td>La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par
$\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t + t^2 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
Au point M(1), $\mathcal{C}$ a une tangente dont un vecteur directeur $\vec{u}$ a pour coordonnées ...</td><td>(–1 ; 2)</td><td>(0 ; 4)</td><td>(1 ; 0)</td></tr>
<tr><td>La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par
$\begin{cases} x = t + \sin 2t \\ y = 2t - \cos t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.
Au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\mathcal{C}$ a une tangente dont le coefficient directeur est ...</td><td>2</td><td>– 3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par
$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $(t \in [0 ; 4])$.
<table><tr><td>t</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>f</td><td>2 ↘</td><td>0</td><td>↗ 1</td></tr><tr><td>g</td><td>1 ↗</td><td>3</td><td>↘ 0</td></tr></table>
Alors la courbe $\mathcal{C}$ est :</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par
$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $(t \in [0 ; 4])$.
Le tableau des variations de f et g est :
<table><tr><td>t</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>$x'(t)$</td><td>0 –</td><td>0</td><td>– –1</td></tr><tr><td>$x(t)$</td><td>4 ↘</td><td>1</td><td>↘</td></tr></table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>$y(t)$</td><td>2 ↘ 0 ↗ 1</td></tr>
<tr><td>$y'(t)$</td><td>-1 $-$ 0 $+$ 2</td></tr>
</table>
Alors $\mathcal{C}$ est la courbe :
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
La courbe $\mathcal{C}$ est définie paramétriquement par $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $\left(t \in [0\,;8]\right)$.

Un tableau possible des variations de f et g est :
</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

18 **Q.C.M.**

Dans chacune des questions suivantes, une au moins des réponses est exacte.

1°) Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramétriques : $x(t) = \sin t$ et $y = \cos 2t$ où $t \in \mathbb{R}$.
a) Les points M (t) et M ($-t$) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
b) Les points M (t) et M ($t+\pi$) sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
c) La courbe $\mathcal{C}$ est la parabole d'équation $y = 1 - 2x^2$.
d) Le point A (1 ; 3) appartient à $\mathcal{C}$.

2°) Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équations paramétriques : $x = \sin t$ et $y = \sin 2t$ où $t \in \mathbb{R}$.
a) Le point O est centre de symétrie de $\mathcal{C}$.
b) Le vecteur $\vec{i} + 2\vec{j}$ est un vecteur directeur de la tangente en M (0).
c) La tangente en M $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ est verticale.
d) La tangente en M $\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ est horizontale.

3°) Chacune des courbes dont les équations paramétriques sont données ci-dessous est incluse dans une parabole :
a) $x = t^2$ et $y = t^4$ avec $t \in \mathbb{R}$.
b) $x = t^2$ et $y = t$ avec $t \in \mathbb{R}$.
c) $x = t + \dfrac{1}{t}$ et $y = t^2 + \dfrac{1}{t^2}$ avec $t \in \left]0\,;+\infty\right[$.
d) $x = \sin t$ et $y = \sin 2t$ avec $t \in \left[0\,;2\pi\right[$.

19 Le plan P est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On considère une courbe paramétrée γ : $\begin{aligned} \mathrm{I} &\to P \\ t &\mapsto \mathrm{M}\left(x(t)\,;y(t)\right) \end{aligned}$ où I est un intervalle non vide non réduit à un élément.

On suppose que x et y sont dérivables sur I et que le vecteur tangent en tout point n'est ni colinéaire à $\vec{i}$ ni colinéaire à $\vec{j}$.
La tangente en un point M de paramètre t coupe l'axe des abscisses en un point H et l'axe des ordonnées en un point K.
Déterminer γ telle que pour tout réel $t \in \mathrm{I}$, le point M soit le milieu du segment [HK].

20 Le plan P est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Déterminer la podaire* de l'hyperbole d'équation $xy = 1$ par rapport à O.

* La podaire d'une courbe par rapport à un point est l'ensemble des projetés orthogonaux de ce point sur les tangentes.

Réponses

1 1°) $x'(t) = -\dfrac{4t}{\left(t^2-1\right)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$

2°) Point stationnaire : pour $t = 0$.

On calcule : $\overrightarrow{\mathrm{M_0M}} = \dfrac{2t^2}{t^2-1}\vec{i} + \dfrac{t^2}{t-1}\vec{j}$.

$\dfrac{1}{t^2}\overrightarrow{\mathrm{M_0M}} = \dfrac{2}{t^2-1}\vec{i} + \dfrac{1}{t-1}\vec{j} \xrightarrow[t\to 0]{} -2\vec{i} - \vec{j}$

C'est un point de rebroussement.

Méthode :

On calcule $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

$\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{(t+1)^2 \times (t-2)}{4}$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1}{2}$

3°) $\lim\limits_{t\to 1} ... = -\dfrac{3}{2}$

$y = x + \dfrac{3}{2}$

2 1°) Question initiale : Préciser les symétries de $\mathcal{C}$; donner un domaine d'étude $\mathcal{D}$.

$S_{\mathrm{O}x}$, $S_{\mathrm{O}y}$, S_{O} $(t \to \pi - t)$

Étude sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

x et y sont périodiques de période 2π, x et y sont paires.

$x(\pi - t) = -x(t)$

$y(\pi - t) = -y(t)$

La courbe est symétrique par rapport au point O.

L'intervalle d'étude est $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3 Courbe de Lissajous

Points multiples : $t = \dfrac{7\pi}{12}$ et $t = \dfrac{7\pi}{12}$.

4 $\mathbb{R}_+^*$; $S_{\mathrm{O}x}$; x est strictement croissante et y est strictement décroissante.

5 Tangente verticale aux points de paramètres $t = \dfrac{\ln\left(3+\sqrt{2}\right)}{2}$ et $t = \dfrac{\ln\left(3-\sqrt{2}\right)}{2}$

1°)
2°) (Oy)
3°)
4°)
5°) – argch $\sqrt{2}$ et argch $\sqrt{2}$
6°) axe (Ox) ($t \to +\infty$ ou $t \to -\infty$)

6 $x'(t) = \dfrac{t^2+1}{t^2}$ et $y'(t) = \dfrac{-t^2-2t+1}{\left(t^2-t\right)^2}$

Les racines du polynôme au numérateur de $y'(t)$ sont $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.

$x\left(-1-\sqrt{2}\right) = -2$; $y\left(-1-\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}-3$; $x\left(-1+\sqrt{2}\right) = -2$; $y\left(-1+\sqrt{2}\right) = -3-2\sqrt{2}$.

Asymptote oblique $x(t) - y(t) = \dfrac{t^2-t-2}{t-1}$; : $x(t) - y(t) - 2 = \dfrac{t^2-t-2}{t-1} - 2 = \dfrac{t^2-3t}{t-1}$

Faire un tableau de signes.
La courbe coupe l'asymptote oblique au point de paramètre $t = 3$.

La courbe $\mathcal{C}$ passe le point O origine du repère $t = -1$.

La tangente en ce point admet le vecteur $\vec{u}\left(2\,;\dfrac{1}{2}\right)$.

Point multiple : $tt' = -1$.

7 **Rappel :** $\mathrm{A}(a\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;b)$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

La droite (AB) a pour équation cartésienne $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

10 Fig. 1 – b ; Fig. 2 – c ; Fig. 3 – a ; Fig. 4 – d

11 Tableau 1 – Fig. 5 ; tableau 2 – fig. 3 ; tableau 3 – fig. 1 ; tableau 4 – fig. 6 ; tableau 5 – fig. 2 ; tableau 6 – fig. 4.

14 **Partie B** On paramètre le cercle Γ de centre O et de rayon 1 par $x = \cos t$ et $y = \sin t$.

15 2°) Si $R = 1$, segment d'extrémités A(–1) et B(1).

Si $R \neq 1$, ellipse de demi-axes $\dfrac{R^2+1}{2R}$ et $\dfrac{\left|R^2-1\right|}{2R}$. Il faut vérifier que les deux valeurs ne sont pas égales.

17 **QCM**

Question 1 : réponse b ; question 2 : réponse b ; question 3 : réponse a ; question 4 : réponse c (ce qui différencie les deux courbes c'est la tangente au point d'abscisse 0 ; au départ je pensais qu'il y avait un problème dans l'énoncé) ; question 5 : réponse c.

18 V ou F

1°) F – V – F – F
2°) V – V – V – V
3°) V – V – F (hyperbole : $y^2 = x^2 - 2$) – F

$\boxed{19}$ On trouve $x'y + yx' = 0$ soit $(xy)' = 0$ d'où $xy = k$.
Le support de l'arc paramétré γ est inclus dans une hyperbole équilatère.

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & x'(t) \\ Y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$$

$$\left[X - x(t)\right] \times y'(t) - x'(t) \times \left[y - y(t)\right] = 0$$

Abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses : $X = x - \dfrac{x'y}{y'}$.

Ordonnée du point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des ordonnées : $Y = y - \dfrac{xy'}{x'}$.

$\boxed{20}$ Podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre.

On trouve une lemniscate de Bernoulli définie par les équations paramétriques : $x(t) = \dfrac{2t}{1+t^4}$ et $y(t) = \dfrac{2t^3}{1+t^4}$.

On peut écrire : H = O + $\dfrac{\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \mid \overrightarrow{f'(t)}\right)}{\left\| \overrightarrow{f'(t)} \right\|^2} \overrightarrow{f'(t)}$.

Questions de cours

$\boxed{1}$ Directions asymptotiques (courbes en paramétriques, courbes en polaires) avec la distance d'un point à une droite.

$\boxed{2}$ Point stationnaire ; point régulier ; point birégulier. Définitions.

$\boxed{3}$ Vecteur tangent. Tangente et normale à une courbe paramétrée en un point.
Position de la courbe par rapport à la normale.

$\boxed{4}$ Formule de Taylor.

$\boxed{5}$ **Symétries d'une courbe paramétrée**

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée (D ; f) où D est une partie de $\mathbb{R}$ centrée en 0.

On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du point $f(t)$.

On note $\mathcal{C}$ son support.
Compléter le tableau ci-dessous sans justifier.

Parité de x et y	**Symétrie de $\mathcal{C}$**
x et y impaires	
x paire et y impaire	
x paire et y impaire	

Que peut-on dire de la courbe lorsque x et y paires ? Elle est parcourue deux fois.

$\boxed{6}$ Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère une courbe paramétrée (I ; f) où I est un intervalle.

On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du point M(t) associé au paramètre t.

1°) On suppose que x et y sont de classe C^1 sur I.
Compléter les définitions suivantes :

M(t) est un **point régulier** signifie que : ………………………. .
M(t) est un **point singulier** signifie que : ………………………. .

2°) Dans les questions 2°) et 3°), on suppose que x et y sont de classe C^2 sur I .
a) Compléter les définitions suivantes :

M(t) est un **point birégulier** signifie que : ………………………. .

Traduire cette condition analytiquement à l'aide de x', y', x'', y''.

b) Dans ce cas, préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente et faire une figure pour illustrer.

3°) Soit M(t_0) un point birégulier.

On appelle **concavité** de la courbe en M_0 le demi-plan fermé admettant pour frontière la tangente et « contenant » le vecteur $\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{dt^2}$. On peut aussi écrire : $M_0 + \mathbb{R} f'(t_0) + \mathbb{R}_+ f''(t_0)$.

a) Démontrer que localement la courbe **C** est contenue dans la concavité.

b) On suppose que le vecteur $f'(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}$.

On dit que la concavité est tournée vers les y positifs lorsque la concavité contient le vecteur $\vec{j}$.

On dit que la concavité est tournée vers les y négatifs lorsque la concavité contient le vecteur $-\vec{j}$.

Donner une condition analytique à l'aide de x', y', x'', y'' pour que la concavité soit tournée vers les y positifs.

$\boxed{7}$ Donner la définition d'un point multiple.

$\boxed{8}$ Donner un système d'équations paramétriques d'un cercle de centre Ω (a ; b) et de rayon R dans le plan muni d'un repère orthonormé.

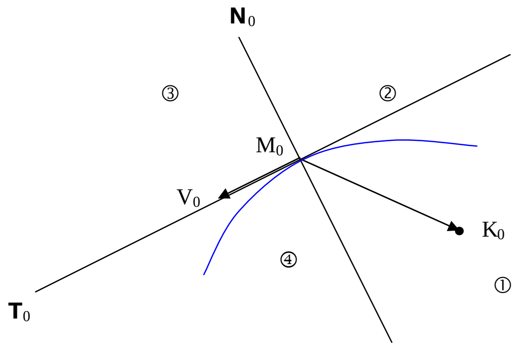
$\boxed{9}$ Soit f une courbe paramétrée de classe C^2 définie sur un intervalle I.

Soit $t_0 \in$ I tel que le point $M_0 = f(t_0)$ soit birégulier.

On considère le point V_0 tel que $\overrightarrow{MV_0} = f'(t_0)$ (ou $V_0 = M_0 + f'(t_0)$ et le point K_0 tel que $\overrightarrow{MK_0} = f''(t_0)$ (ou $K_0 = M_0 + f''(t_0)$).

1°) Démontrer que localement (c'est-à-dire au voisinage du point M_0) la courbe est dans le demi-plan de frontière $\mathbf{T}_0$ et contenant le point K_0.

2°) Rappeler la définition de la normale en M_0 à la courbe. Justifier que la courbe « traverse » la normale.



Il existe un réel α > 0 tel que $\forall\, t \in [t_0 - \alpha\,;\, t_0]$ tel que $f(t)$ appartienne au quart de plan ①.

Il existe un réel α > 0 tel que $\forall\, t \in [t_0\,;\, t_0 + \alpha]$ tel que $f(t)$ appartienne au quart de plan ④.