1$^{\text{ère}}$ S3

Corrigé du contrôle commun du jeudi 22 octobre 2009

I.

1°) $f : x \mapsto \sqrt{9-x^2}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x}$.

$\mathscr{D}_f = [-3\,;3]$ $\qquad$ $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$ $\quad$ (ou : $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$)

Explications :

$f(x)$ existe si et seulement si le radicande est positif ou nul

si et seulement si $9-x^2 \geq 0$

On considère le polynôme $9-x^2 = (3-x)(3+x)$.

3 et –3 sont racines de ce polynôme.
Donc son discriminant est strictement positif. Par la règle du signe du trinôme, on peut remplir le tableau de signes ci-dessous.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
SGN de $9-1\,x^2$		$-$	0	+	0	$-$	

$\mathscr{D}_f = [-3\,;3]$

$g(x)$ existe si et seulement si le dénominateur est non nul

si et seulement si $x^2 - x \neq 0$
si et seulement si $x(x-1) \neq 0$
si et seulement si $x \neq 0$ et $x-1 \neq 0$
si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq 1$

$\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\,;1\}$

N.B. : on peut vérifier ces deux ensembles de définition en représentant les courbes représentatives des deux fonctions sur la calculatrice graphique.

2°) Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - 1 + x$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}$ sont égales.

3°) Pour tout réel x, on a : $(v \circ u)(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$.

Détail :

$$(v \circ u)(x) = 1 - \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{\cancel{1} + x^2 \cancel{-1}}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

4°) Le nombre –1 est racine de l'équation $-x^3+ax^2-x+a+5=0$ (E) pour $a=-\dfrac{7}{2}$

Explication :

– 1 est racine de (E) si et seulement si $-(-1)^3+a(-1)^2-(-1)+a+5=0$

si et seulement si $2a+7=0$

si et seulement si $a=-\dfrac{7}{2}$

si et seulement si $a=-\dfrac{1}{3}$

5°) La fonction *f* est paire.

6°) $\text{A}(x)=8x^2-36$; $\text{B}(x)=-2x^2+16$

II. $f(x)=(1-2x)^3$.

1°) $u(x)=1-2x$; $v(x)=x^3$

2°) La fonction *u* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction *v* est croissante sur $\mathbb{R}$.

Donc on en déduit que la fonction *f* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3°) $f(x)=-8x^3+12x^2-6x+1$ (identité cubique $(a-b)^3$)

III. $f : x \mapsto -2x^2+1$

On considère la fonction *u* définie par $u(x)=x^2$.

Erreurs :

- Mauvaise rédaction : « La fonction de référence est la fonction x^2 ».
- Confusion de vocabulaire

Des confusions sur le mot « chiffre ».
En mathématiques, le mot « chiffre » a une signification précise : il désigne un nombre entre 0 et 9.
Il y a donc dix chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
On ne peut employer le mot « chiffre » à la place du mot « nombre ».

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)=-2u(x)+1$.

La fonction *u* est décroissante sur l'intervalle]–∞ ; 0] et croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.

Comme $-2<0$, les variations de – 2 *u* sont contraires de celles de *u*.

Donc la fonction – 2*u* est croissante sur l'intervalle]–∞ ; 0] et décroissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.

D'après la règle, la fonction obtenue en ajoutant le nombre 1 aux images de la fonction – 2 *u* sont les mêmes que celles de la fonction –2*u*.

Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle] –∞ ; 0] et décroissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.

On calcule $f\left(0\right)=1$.

On peut alors dresser le tableau de variations de la fonction *f*.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Attention à ne pas écrire n'importe quoi :

On ne peut pas passer de la courbe représentative de *u* à celle de *f* par une transformation connue du plan (encore moins par une translation comme j'ai pu le trouver dans ces copies).

Ici : l'énoncé demandait explicitement de n'utiliser qu'une seule fonction de référence.
Pas question donc d'utiliser ici la méthode par composée de deux fonctions (qui marchait mais qui ne correspondait pas à la question).

La calculatrice graphique permet de tracer la représentation graphique de *f* et donc de contrôler le tableau de variation de *f* (ce qui permettait d'éviter de faire des erreurs comme cela fut le cas de nombreux élèves qui ne semblent pas y avoir pensé).

Compétences évaluées dans cet exercice :
- savoir parler des variations d'une fonction ;
- savoir mettre en œuvre les règles sur les opérations algébriques et le sens de variation des fonctions.

Exemples de mauvaise rédaction :

« La fonction $u : x \mapsto x^2$ est décroissante sur … et croissante sur …..
On multiplie la fonction par – 2.
Donc le sens de variation change. »

« La fonction de référence est x^2.
$-2x^2+1$ a donc un sens de variation inverse à x^2. »

« On part de la fonction « carré » de référence.
Puis on multiplie les ordonnées de *f* par un coefficient « –2 ».
Enfin, on utilise la translation de vecteur $\vec{j}$. »

« La fonction de référence est x^2.
La fonction x^2 est décroissante sur l'intervalle] –∞ ; 0] et croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[.
Mais ici avec l'apparition du moins, ses variations seront inversées. De plus, l'origine ne sera plus 0 mais – 2. »

« On note $u\left(x\right)=x^2$.
On passe de $\mathscr{C}_u$ à $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\vec{j}$ et la symétrie d'axe O*x*. $f\left(x\right)=-u\left(x\right)+1$.
Or *u* est décroissante sur l'intervalle] –∞ ; 0] et croissante sur l'intervalle [0 ; +∞[. »

« On utilise la fonction carrée comme fonction de référence.
$g(x)=x^2$.
g est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
Or $f(x)=-2g(x)+1$.
Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. »

« On pose $u(x)=x^2$.
Donc $f(x)=-2\times u(x)+1$.
On multiplie $u(x)$ par -2.
Or $-2<0$.
Donc les variations de f sont contraires à celles de u.
De plus, on ajoute 1 à toutes les ordonnées de f. »

« La fonction de référence est x^2.
Cette fonction est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On multiplie cette fonction par un chiffre négatif alors les variations s'inversent.
L'ajout du nombre 1 n'influe pas sur les variations de f.
Donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. »

« La fonction de référence utilisée est la fonction carrée.
Dans l'expression de $f(x)$ le coefficient de x^2 est inférieur à 0.
Le variations de f sont donc contraires à celles de la fonction carrée. »

« La fonction de référence est x^2.
Or $f(x)=-2x^2+1$.
Donc on a multiplié par -2. Or $-2<0$ donc le sens de variation de f sera contraire à celui de la fonction x^2.
De plus, on a rajouté 1 à toutes les ordonnées. »

« On sait que la fonction de référence x^2 est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Quand on lui ajoute un chiffre par addition, son sens de variation ne change pas mais quand on le multiplie par un chiffre inférieur à 0, alors son sens de variation est inversé. »

« On prend x^2 comme fonction de référence.
On observe qu'elle est multipliée par -2 ; la fonction sera donc l'opposé de la fonction de référence.
De plus, en ajoutant 1, on connaît l'ordonnée à l'origine. »

« Fonction de référence est $f(x)=x^2$.
On passe de la fonction de référence à $f(x)$ par une translation de vecteur $2\vec{i}+\vec{j}$. »

« La fonction de référence est $g(x)=x^2$.
Or : $f(x)=-2\times g(x)+1$.
Ainsi les ordonnées des points de $\mathscr{C}_g$ à $\mathscr{C}_f$ sont multipliées par -2 pour former $\mathscr{C}_f$.
Donc f et g ont des sens de variation opposés. »

« Considérons la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + 1$.
La fonction g : $x \mapsto x^2$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
Si on multiplie $g(x)$ par – 2 ça donne la fonction h : $x \mapsto -2x^2$.
Donc on multiplie par un nombre négatif, le sens de variation est inversé et si on ajoute 1 tel que $f : x \mapsto -2x^2 + 1$, ça ne change pas. »

« Soit x^2 une fonction de référence, décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On multiplie les abscisses par – 2 donc le sens de variation est opposé et on ajoute 1 aux ordonnées. »

« La fonction de référence est la fonction carré. L'ordonnée est la même pour un x et son opposé.
$f(x)$ est sous la forme $ax + b$ où b est l'ordonnée à l'origine, a le coefficient directeur et x la variable :
$-2x^2$ est nul pour $x = 0$ sinon le résultat est toujours négatif car un carré est toujours positif.
Le maximum est 1 ; il est obtenu pour $x = 0$. »

IV. $f : x \mapsto x^2 - 4x + 3$

1°) $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (x-2)^2 - 1$

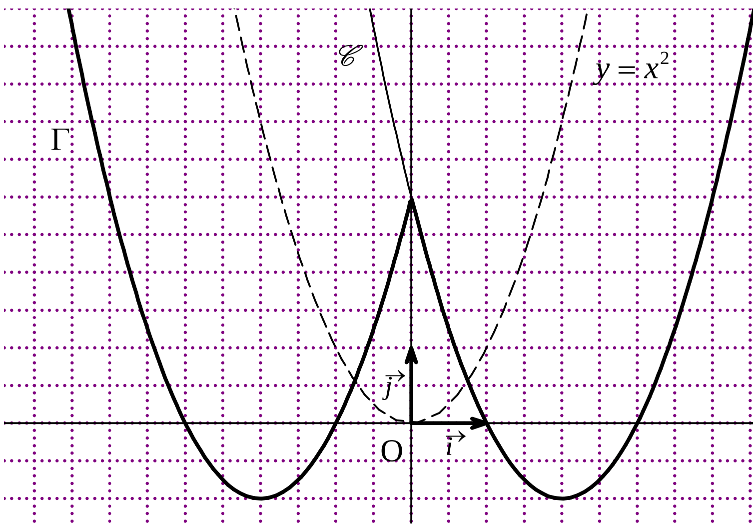
Attention à ne pas confondre « forme canonique » et « forme factorisée » (quelques élèves confondent encore les deux).
Seule la forme canonique permet de répondre à la question suivante (on utilise la forme adaptée selon la question posée).

$\mathscr{C}$ est l'image de la courbe d'équation $y = x^2$ par <u>la</u> translation de vecteur $2\vec{i} - \vec{j}$.

article important (on ne peut pas dire « par translation de vecteur $2\vec{i} - \vec{j}$ »)

On peut dire $\mathscr{C}$ est l'image de la courbe d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$ suivie de la translation de vecteur $-\vec{j}$; en aucun cas, on ne peut dire « $\mathscr{C}$ est l'image de la courbe d'équation $y = x^2$ par la translation de vecteur $2\vec{i}$ et $-\vec{j}$ ».
Souvent, on préfère cependant exprimer à l'aide d'une seule transformation.

2°) Tracé



Attention à bien tracer la courbe de la fonction carrée.

La courbe représentative de la fonction carrée passe par les points de coordonnées (–2 ; 4), (–1 ; 1), (0 ; 0), (1 ; 1), (2 ; 4).

On contrôlait le résultat à l'aide de la calculatrice graphique ; encore une fois, cela pouvait éviter des erreurs à beaucoup d'élèves.

3°) $g : x \mapsto x^2 - 4|\,x\,| + 3$.

• $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ $\mathscr{D}_g$ est centré en zéro.

Il est vrai que comme $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$, la condition « $\mathscr{D}_g$ est centré en zéro » est bien réalisée.
Mais comme ce n'est pas toujours le cas, il est important de bien mettre cette condition.

• $\forall x \in \mathscr{D}_g$ $g(-x) = x^2 - 4|-x| + 3$
important $= x^2 - 4|\,x\,| + 3$ (on est obligé de conserver la valeur absolue ; on ne peut pas enlever la valeur absolue comme ça)
$= g(x)$

On en déduit que g est paire.

Comme le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé, on en déduit que Γ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ \ g(x) = x^2 - 4x + 3 = f(x)$
Donc sur ℝ+, la courbe Γ est confondue avec $\mathscr{C}$.

N.B. : on peut vérifier les tracés des courbes sur la calculatrice graphique.
La valeur absolue sur la calculatrice se note ABS (su la TI 82, taper $\boxed{\text{2nd}}$ puis $\boxed{x^{-1}}$).

V. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

1°) Démontrons que, pour tout réel $x \neq -1$, on a : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

Pour tout réel $x \neq -1$, $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$$f(x) = \frac{(x+1)-1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

2°) $u(x) = x + 1$; $v(x) = \dfrac{1}{x}$; $w(x) = 1 - x$

La fonction u est croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction v est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et sur $]\ 0\ ;\ +\infty[$ (attention à ne pas dire que v est décroissante $\mathbb{R}^*$ car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle).

La fonction w est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Var. de u		$-$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+$	
Var de v o u		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	
Var. de w o v o u		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

$$]-\infty\ ;-1[\ \xrightarrow{u}\ ]-\infty\ ;0[\ \xrightarrow{v}\ ]-\infty\ ;0[\ \xrightarrow{w}\mathbb{R}$$
$$]-1\ ;+\infty[\ \xrightarrow{u}\ ]0\ ;+\infty[\ \xrightarrow{v}\ ]0\ ;+\infty[\ \xrightarrow{w}\mathbb{R}$$

3°) Δ : $y=-\dfrac{1}{2}x+1$

Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ, on étudie le signe de la différence : $g(x)=f(x)-\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)$

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\quad g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\left(-\dfrac{1}{2}x+1\right)$

$$g(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}x-1$$

$$g(x)=\frac{2x+x(x+1)-2(x+1)}{2(x+1)}$$

$$g(x)=\frac{2x+x^2+x-2x-2}{2(x+1)}$$

$$g(x)=\frac{x^2+x-2}{2(x+1)}$$

Considérons le polynôme x^2+x-2.

1 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

$\alpha\times1=\dfrac{-2}{1}$

$\alpha=-2$

Les racines du polynôme sont $x_1=1$ et $x_2=-2$.

On utilise la règle du signe d'un polynôme du second degré.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$2(x+1)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ					$\Vert$				

Attention : on ne superpose pas de 0 sur les doubles barres (faute pénalisée).

- Sur les intervalles $]-\infty\,;-2[$ et $]-1\,;1[$, $\mathscr{C}$ est strictement au-dessous de Δ.
- Sur les intervalles $]-2\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$, $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de Δ.
- $\mathscr{C}$ et Δ sont sécantes aux points d'abscisses respectives -2 et 1.

Les mots qui vont avec le mot « courbe » :

- sécantes
- confondues
- positions relatives
- au-dessus ; au-dessous

Ne pas inventer de notation du style $y_{\mathscr{C}}$ ou y_{Δ} qui n'ont aucun sens.
Ne pas employer les symboles < et > pour $\mathscr{C}$ et Δ qui n'ont pas de sens (ne pas écrire $\mathscr{C} > \Delta$ ni $\mathscr{C} < \Delta$).
$\mathscr{C} - \Delta$ n'a aucun sens.
Ne pas superposer de 0 sur les doubles barres.

Conseil :

Dans l'étude de la position relative, les lettres $\mathscr{C}$ et Δ ne doivent apparaître qu'à la fin de l'étude.

VI. $f(x) = 3-(x-1)^2$.

1°) Démontrons que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \qquad (x-1)^2 &\geq 0 \\
&\qquad \times(-1) \quad (-1<0) \\
-(x-1)^2 &\leq 0 \\
&\qquad -3 \\
3-(x-1)^2 &\leq 0 \\
f(x) &\leq 3
\end{aligned}$$

3 est un majorant de f sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer que 3 est le maximum global de f sur $\mathbb{R}$, **<u>il suffit</u>** de donner un nombre dont l'image par f soit égale à 3

On écrit directement : $f(1) = 3$.

Donc le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à 3 ; il est obtenu pour $x = 1$.

Attention au vocabulaire : un extremum est un maximum ou un minimum.

Ici, il ne s'agit pas de conclure que 3 est un majorant de *f* sur $\mathbb{R}$; il faut expliquer pourquoi 3 est le maximum de *f* sur $\mathbb{R}$.

2°)
$u(x) = x - 1$; $v(x) = x^2$; $w(x) = 3 - x$

La fonction *u* est croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction *v* est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

La fonction *w* est décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Variation de *u*		$-$ ↗	0	↗ $+$	
Variations de *v* o *u*		↘	0	↗	
Variations de *w* o *v* o *u*		↗	3	↘	

$u(1) = 0$
$v(0) = 0^2 = 0$
$w(0) = 3$

$]-\infty\,;1] \xrightarrow{u}]-\infty\,;0] \xrightarrow{v} [0\,;+\infty[\xrightarrow{w} \mathbb{R}$

$[1\,;+\infty[\xrightarrow{u} [0\,;+\infty[\xrightarrow{v} [0\,;+\infty[\xrightarrow{w} \mathbb{R}$

D'après le tableau de variation, *f* admet 3 pour maximum sur $\mathbb{R}$; il est obtenu pour $x = 1$.

Attention, il n'y a pas à mettre de barres simples dans le tableau de variations.

VII. On pouvait faire une figure « à taille réelle », comme m'a dit un élève.

1°) L'aire de la surface imprimable est de 8 cm^2.

Explication :

Dans ce cas, la surface imprimable est un rectangle de largeur 2 cm et de longueur 8 cm.

2°) Déterminer *x* pour que l'aire de la surface imprimable soit égale à 14 cm^2.

La surface imprimable est un rectangle dont les dimensions sont *x* – 4 et *x* – 2.
L'aire de la surface imprimable est donc égale à $\mathscr{A} = (x-4)(x-2)$.

$(x-2)(x-4)=14$
$x^2-6x+8=14$
$x^2-6x-6=0$

Considérons le polynôme x^2-6x-6.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-6$; $c=-6$

Calcul du discriminant réduit :

$$\begin{aligned}\Delta' &= b'^2-ac\\ &=15\\ &=13\end{aligned}$$

On a : $\Delta'>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} \qquad x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$x_1=3-\sqrt{15} \qquad x_2=3+\sqrt{15}$$

On n'écrit pas S = puisque l'on ne demandait pas explicitement de résoudre une équation.

Or x est une longueur donc $x>0$.
On en déduit que $x=3+\sqrt{15}$.

Feuille d'aide à la rédaction

J'aurais dû distribuer une feuille de modèles de rédaction (ou mettre une feuille que les élèves peuvent imprimer et apporter le jour du contrôle)

Comment définir une fonction

- Essentiellement deux manières :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 3$.

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x^2 - 3$

- Banni tous les raccourcis du genre :

« Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + 3$. »

« On considère la fonction $2x^2 + 3$. »

Les 4 trucs à ne pas confondre pour une fonction et les mots qui marchent ensemble

4 « trucs » à ne pas confondre sur les fonctions

f	$f(x)$	D	$\mathscr{C}_f$
la fonction variation (croissante, décroissante) extremum (minimum ; maximum)	l'image de x par f	l'ensemble de définition	la courbe de f

---

Le vocabulaire des courbes de fonctions

Le vocabulaire suivant est connu depuis la 6^{e} pour les droites du plan.
Tout ce qui suit est relatif à deux courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' ; on adapte sans difficulté les exemples donnés au cas d'une droite et d'une courbe.

- Intersection de deux courbe :

Exemples de modèle de rédaction :

« Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont **sécantes** au point A(… ; …). »
« Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' **se coupent** au point A(… ; ….). »
« Le **point d'intersection des courbes** est le point A(… ; …) »
« $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$ = {A} avec A(… ; ….). »

- Courbes confondues

« Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' sont **confondues** sur l'intervalle … ».
On insistera bien sur le fait que l'on parle de deux courbes confondues sur un intervalle mais pas de courbes confondues en un point.

On parle de points confondus ou de droites confondues.

- Recherche des points d'intersection de deux courbes ou d'une droite et d'une courbe

« Les abscisses des points d'intersection de … et … sont solutions de l'équation ….. = ….. »

Ou variante :

« Les coordonnées des points d'intersection de …. et de …. vérifient le système $\begin{cases} .... \\ .... \end{cases}$ (on met les deux équations) ».

Le vocabulaire des fonctions

- « les variations de *f* » et non « les variations de $f(x)$ ».

Ne pas oublier de « quantifier » les égalités chaque fois que c'est nécessaire.
A plusieurs endroits il est important de formuler des phrases quantifiées.

- *Attention à la précision du vocabulaire :*

Le mot « solution » marche avec le mot « équation » ; le mot « racine » marche avec le mot « polynôme ».

On dit qu'une partie D de $\mathbb{R}$ est centré « en » 0 et non « sur » 0.

On dit : « la fonction g est paire » et non « la fonction $g(x)$ est paire » ;

Un extremum est un maximum ou un minimum.

Etudier la parité d'une fonction c'est déterminer si cette fonction est paire, impaire ou ni paire ni impaire.

L'énoncé comportait l'étude des variations d'un certain nombre de fonctions :
- en utilisant les opérations algébriques ;
- en utilisant les composées de fonctions.

Pour les opérations algébriques, on utilise une seule fonction.
Pour les composées, on utilise deux ou trois fonctions.