

L'exercice **III** est facultatif.

On utilisera une copie simple pour la rédaction des exercices **I** et **II**.

I. On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f .
On rédigera avec soin sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

2°) On pose $I =]0; +\infty[$.

On rappelle qu'une primitive de la fonction $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle I est la fonction $x \mapsto x \ln x - x$.

À l'aide de ce résultat, déterminer une primitive F de f sur I .

3°) Calculer l'intégrale $\int_1^2 f(x) dx$. On donnera la valeur exacte du résultat.

Vérifier le résultat en utilisant le site dcode ou le site wolframalpha.

Quelle est la nature de ce nombre ?

On pourra utiliser la propriété suivante dont la démonstration nécessite des outils qui dépassent le programme de terminale :

Si x est un nombre rationnel strictement positif et différent de 1, $\ln x$ est un nombre irrationnel.

II. On considère la fonction $g : x \mapsto x \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de g .

2°) Déterminer la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0^+ .

III. Pour tout entier naturel n on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

Partie A

1°) Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 « à la main ». Pour obtenir les valeurs des coefficients binomiaux, on pourra utiliser le triangle de Pascal.

2°) À l'aide de la calculatrice, déterminer les valeurs de S_n pour $n \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$.

On pourra utiliser la rubrique « Suites » de la calculatrice.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n .

Pour cela, à tout entier naturel n on associe la fonction $h_n : x \mapsto (x+1)^n$.

1°) Démontrer que pour tout réel x on a : $h_n(x) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k$.

2°) En calculant le deux manières $\int_0^1 h_n(x) dx$ et en utilisant le développement de la question précédente, déterminer une expression simplifiée de S_n en fonction de n .

À l'aide de cette formule, vérifier les résultats de la partie A.