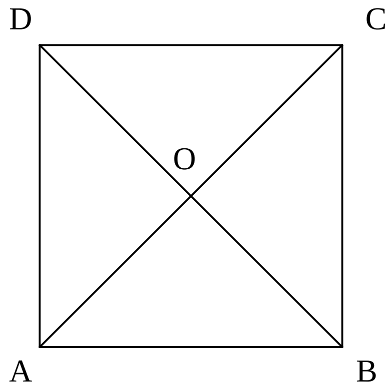
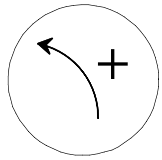
I. On se place dans le plan orienté P et on considère un carré ABCD direct. On note O son centre.





1°) Recopier et compléter la phrase :

Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont les réels de la forme …. .

Réponse :

Les mesures en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont les réels de la forme $\frac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $\underline{k \in \mathbb{Z}}$.

2°) Déterminer la mesure principale en radian des angles orientés $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$, $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{DO}\right)$, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}\right)$.

On rappelle que $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)$ désigne l'angle orienté formé par les vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$ dans cet ordre.

On rappelle qu'il s'agit de l'angle orienté formé par les demi-droites $[DA)$ et $[DB)$ dans cet ordre.

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$:	$\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{DO}\right)$:	$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}\right)$:

3°) Déterminer et tracer

l'ensemble E des points M de P tels $\left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}\right)=\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$;

l'ensemble F des points M de P tels $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}\right)=\frac{\pi}{4} \quad (2\pi)$;

l'ensemble G des points M de P tels $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right)=-\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$;

l'ensemble H des points M de P tels $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right)=\pi \quad (2\pi)$.

Exemple de réponse :

E est le demi-cercle de diamètre $[CD]$ situé à l'intérieur du carré ABCD <u>privé de C et de D</u>.

E est le demi-cercle de diamètre $[CD]$ situé contenant le point O <u>privé de C et de D</u>.

Sur le graphique, on montre bien que les points C et D sont exclus en faisant des petits arcs.

II. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $4z^2+5=0$ ont pour écriture exponentielle ………………….. .

III. Déterminer en rédigeant la forme exponentielle des nombres complexes suivants $\dfrac{3}{\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}$, $\dfrac{4}{2+(\mathrm{i}-1)^2}$, $\dfrac{4}{2\mathrm{i}+(\mathrm{i}-1)^2}$.

Détailler bien la démarche et vérifier à l'aide de la calculatrice.

IV. 1°) Soit θ un réel qui n'est pas de la forme $\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Démontrer que l'on a $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}=1-\mathrm{i}\tan\dfrac{\theta}{2}$.

2°) Soit θ un réel qui n'est pas de la forme $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Démontrer que l'on a $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}=1-\mathrm{i}\cot\dfrac{\theta}{2}$.

Solution :

1°) $$\frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}=\frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)}=\frac{\cancel{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{\cancel{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=1-\mathrm{i}\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=1-\mathrm{i}\tan\frac{\theta}{2}$$

2°) $$\frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}=\frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}\right)}=\frac{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}=-\mathrm{i}\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=-\mathrm{i}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}-\mathrm{i}\right)=1-\mathrm{i}\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=1-\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}$$

V. Déterminer les nombres complexes z de module 1 tels que $z^2 = \overline{z}$.
On attend une démarche sous la forme d'une chaîne d'équivalences.

Solution :

Déterminons les nombres complexes z de module 1 tels que $z^2 = \overline{z}$ (1).

Soit z un nombre complexe de module 1 vérifiant (1).

On a $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où θ est un réel.

$(1) \Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$

$\Leftrightarrow 2\theta = -\theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Les nombres complexes cherchés sont 1, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

VI. On considère les matrices $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Pour tout réel θ on pose $\mathrm{E} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{C} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\mathrm{D}$.

1°) Écrire la matrice E sous la forme la plus simple possible en utilisant des cosinus et des sinus.
Vérifier que tous les coefficients sont réels.

2°) Déterminer les réels θ tels que la matrice E soit diagonale.
Rédiger sous forme d'équivalences.

VII. On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On note A le point d'affixe $-3-3\mathrm{i}$.
Faire un graphique.
Faire apparaître deux mesures en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$. Écrire ces mesures sur le graphique.

VIII. On se place dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 2.
On note A et B les points de $\mathcal{C}$ dont le projeté orthogonal sur l'axe des imaginaires purs est le point I d'affixe i.
On suppose que $\operatorname{Re} z_{\mathrm{A}} > 0$ et $\operatorname{Re} z_{\mathrm{B}} < 0$.
Faire un graphique.

Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

IX.

1°) Soit θ un réel.

Compléter $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = ...$ (cours).

Justifier que $-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)}$.

2°) Déterminer les réels θ tels que $\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.