T
exp

Interrogation écrite du vendredi 3 mai 2024

Pas de fiche

20 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………………

Note : ….. / 20

L'utilisation du symbole d'équivalence est interdite.

I. (12 points)

Partie 1 (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 4 points)

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité d'ordre 2.

1°) Déterminer la matrice J telle que $\mathrm{A}=3\mathrm{I}+\mathrm{J}$. On donnera la matrice J sans explication.

2°) Calculer J^2. On donnera le résultat sans explication.

3°) À l'aide de la formule du binôme de Newton, et en justifiant son utilisation, démontrer que, pour tout entier naturel $n\geqslant 1$, on a $\mathrm{A}^n=3^n\mathrm{I}+n3^{n-1}\mathrm{J}$ et vérifier que la formule est encore valable pour $n=0$.

En déduire que $\mathrm{A}^n=3^{n-1}\begin{pmatrix}3+n & -n\\ n & 3-n\end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

Partie 2 (6 points : 1°) 1 point + 1 point + 2 points ; 2°) 2 points)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0 et v_0 ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases}u_{n+1}=4u_n-v_n\\ v_{n+1}=u_n+2v_n\end{cases}$ pour tout entier naturel n.

Le but de cette partie est d'obtenir les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

1°) Pour tout entier naturel n, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n. On répondra par une seule égalité sans explication.

En déduire X_n en fonction de A et de X_0. On répondra par une seule égalité sans explication.

Finir en utilisant le résultat de la partie 1. On donnera sans explication les expressions de u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

2°) Dans cette question, on suppose que $u_0 = v_0 = a$, où a est un réel donné.
Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de n et de a sous la forme la plus simple possible.

II. (4 points : 2 points + 2 points)

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout réel x on pose $E = \left(\cos^2 x\right)C + \left(\sin^2 x\right)D$ et $F = \left(\sin^2 x\right)C - \left(\cos^2 x\right)D$.

Écrire les matrices E et F sous la forme la plus simple possible.

III. (4 points : 1°) 3 points ; 2°) 1 point)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les vecteurs $\vec{u}\left(\cos x\,;-2\sin 3x\right)$ et $\vec{v}\left(2\cos 3x\,;\sin x\right)$ où x est un réel donné.

1°) Exprimer le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sous la forme la plus simple possible, en ne faisant intervenir qu'un seul cosinus ou qu'un seul sinus.

……..

……..

……..

2°) Quel est le plus petit réel x positif ou nul tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux ?

…. (une seule réponse sans égalité)

Corrigé de l'interrogation écrite du 3-5-2024

I.

Partie 1

On pose $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note I la matrice identité d'ordre 2.

1°) Déterminer la matrice J telle que $\mathrm{A}=3\mathrm{I}+\mathrm{J}$. On donnera la matrice J sans explication.

$$\mathrm{J}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2°) Calculer J^2. On donnera le résultat sans explication.

$\mathrm{J}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (calcul à la main ou à la calculatrice)

J^2 est la matrice nulle carrée d'ordre 2.

La matrice J est donc nilpotente d'ordre 2.

3°) À l'aide de la formule du binôme de Newton, et en justifiant son utilisation, démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\mathrm{A}^n=3^n\mathrm{I}+n3^{n-1}\mathrm{J}$ et vérifier que la formule est encore valable pour $n=0$.

En déduire que $\mathrm{A}^n=3^{n-1}\begin{pmatrix} 3+n & -n \\ n & 3-n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

Les matrices I et J commutent pour le produit matriciel (propriété : la matrice identité commute avec toutes les matrices), donc les matrices 3I et J commutent pour le produit.

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton pour les matrices.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{A}^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}(3\mathrm{I})^{n-k}\,\mathrm{J}^k$$

$=\binom{n}{0}(3\mathrm{I})^n\,\mathrm{J}^0+\binom{n}{1}(3\mathrm{I})^{n-1}\,\mathrm{J}^1$ (comme J^2 est la matrice nulle, toutes les puissances de J d'exposant entier naturel supérieur ou égal à 2 sont égales à la matrice nulle)

$$=3^n\mathrm{I}^n\times\mathrm{I}+n\times 3^{n-1}\times\mathrm{I}^{n-1}\times\mathrm{J}$$

$$=3^n\mathrm{I}\times\mathrm{I}+n3^{n-1}\times\mathrm{I}\times\mathrm{J}$$

$$=3^n\mathrm{I}+n3^{n-1}\mathrm{J}$$

Vérifions que la formule est encore valable pour $n=0$.

D'une part, $A^0 = I$.

D'autre part, $3^0 I + 0 \times 3^{0-1} J = I$.

On en déduit que la formule est encore valable pour $n=0$.

En déduire que $A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3+n & -n \\ n & 3-n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel *n*.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 3^n I + n3^{n-1} J$$

$$= 3^{n-1}\left(3I + nJ\right)$$

$$= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3+n & -n \\ n & 3-n \end{pmatrix}$$

Partie 2

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par leurs premiers termes u_0 et v_0 ainsi que par les relations de récurrence $\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \end{cases}$ pour tout entier naturel *n*.

Le but de cette partie est d'obtenir les expressions de u_n et v_n en fonction de *n*, u_0 et v_0.

1°) Pour tout entier naturel *n*, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n. On répondra par une seule égalité sans explication.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$$

En déduire X_n en fonction de A et de X_0. On répondra par une seule égalité sans explication.

(X_n) est donc une suite de matrices colonnes (vecteurs colonnes) vérifiant une relation de récurrence semblable à celle des suites géométriques (pour passer d'un terme à l'autre, il suffit de multiplier par la matrice A).

D'après le cours, on peut aisément exprimer X_n en fonction de A, X_0 et *n* : $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n = A^n X_0$$

$$= 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3+n & -n \\ n & 3-n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \qquad \text{(car on a } X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\text{)}$$

$$= 3^{n-1}\begin{pmatrix} (3+n)u_0 - nv_0 \\ nu_0 + (3-n)v_0 \end{pmatrix}$$

Finir en utilisant le résultat de la partie 1. On donnera sans explication les expressions de u_n et v_n en fonction de *n*, u_0 et v_0.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^{n-1}\left[(3+n)u_0 - nv_0\right]$ et $v_n = 3^{n-1}\left[nu_0 + (3-n)v_0\right]$.

2°) Dans cette question, on suppose que $u_0 = v_0 = a$, où *a* est un réel donné.
Donner les expressions de u_n et v_n en fonction de *n* et de *a* sous la forme la plus simple possible.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 3^n a \text{ et } v_n = 3^n a$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont égales et sont géométriques.

II.

On considère les matrices $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Pour tout réel *x* on pose $\mathrm{E} = (\cos^2 x)\mathrm{C} + (\sin^2 x)\mathrm{D}$ et $\mathrm{F} = (\sin^2 x)\mathrm{C} - (\cos^2 x)\mathrm{D}$.
Écrire les matrices E et F sous la forme la plus simple possible.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \cos 2x \end{pmatrix} \; ; \; \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} -\cos 2x & -\cos 2x \\ -\cos 2x & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise les formules suivantes :
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (relation fondamentale de la trigonométrie) ;
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ (l’une des formules de duplication du cosinus).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{E} = \begin{pmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & \cos^2 x + \sin^2 x \\ \cos^2 x + \sin^2 x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{pmatrix}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} \sin^2 x - \cos^2 x & \sin^2 x - \cos^2 x \\ \sin^2 x - \cos^2 x & \cos^2 x + \sin^2 x \end{pmatrix}$$

III.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les vecteurs $\vec{u}\left(\cos x\,;-2\sin 3x\right)$ et $\vec{v}\left(2\cos 3x\,;\sin x\right)$ où x est un réel donné.

1°) Exprimer le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sous la forme la plus simple possible, en ne faisant intervenir qu'un seul cosinus ou qu'un seul sinus.

On applique l'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs dans le plan muni d'un repère orthonormé.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = \cos x \times 2\cos 3x + \left(-2\sin 3x\right) \times \sin x$

$= 2\left(\cos x \times \cos 3x - \sin 3x \times \sin x\right)$ [ligne indispensable à écrire]

$= 2\cos\left(x + 3x\right)$

$= 2\cos 4x$ (formule d'addition du cosinus)

2°) Quel est le plus petit réel x positif ou nul tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux ?

$\dfrac{\pi}{8}$ (une seule réponse sans égalité)

On commence par chercher les réels x tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

On raisonne par chaîne d'équivalences.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4} \quad \left(k \in \mathbb{Z}\right)$

Le plus petit réel x positif ou nul tel que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux est donc $\dfrac{\pi}{8}$.