T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 3 mai 2024

20 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

Note : ….. / 20

I. (7 points : 1°) 1 point + 1 point ; 2°) 2 points + 1 point ; 3°) 2 points)

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté. À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage.

1°) À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

……………………………………. (écrire le nombre)

Faire une phrase justificative bien rédigée.

Le nombre de groupes de 5 coureurs est égal au nombre de …………………………………………………………..

………

2°) À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants.

● Combien y a-t-il de groupes de 5 personnes comprenant ce coureur ?

………. (une seule réponse sans égalité)

● Calculer la probabilité pour que le coureur choisi subisse le contrôle prévu pour cette étape.

………. (réponse sous forme décimale sans égalité)

3°) On suppose que la course compte n coureurs, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 5.
À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les n participants.

Calculer la probabilité pour que le coureur choisi subisse le contrôle prévu pour cette étape.

………. (réponse en fonction de n sous la forme la plus simple possible)

II. (3 points : 1 point + 2 points)

Combien y a-t-il d'anagrammes des mots suivants ?

FRANCE : ……………………………… calcul : ………………………

ALLEMAGNE : ……………………………… calcul : ………………………

III. (9 points)

Dans tout l'exercice, on considère une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.

Partie A (3 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point ; 3°) 1 point)

Dans cette partie, on s'intéresse aux tirages successifs sans remise de 3 boules dans l'urne. On note les numéros des boules dans l'ordre.

1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ? ………………

2°) Combien y a-t-il de tirages qui ne contiennent aucun numéro pair ? ………………

3°) Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins un numéro pair ? ………………

Écrire les calculs nécessaires pour les 3 questions sur la ligne ci-dessous :

……………………………………………………..……………………………………………………………………

Partie B (6 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point ; 4°) 1 point + 1 point)

Dans cette partie, on s'intéresse aux tirages successifs sans remise de 2 boules dans l'urne. On note les numéros des boules dans l'ordre.

1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ? ………

2°) Combien y a-t-il de tirages tels que les numéros des deux boules ne soient pas des entiers consécutifs ? ………

3°) Combien y a-t-il de tirages ne comprenant que des numéros pairs ou multiples de 3 ? ………

4°) Le but de cette question est de simuler deux tirages successifs aléatoires sans remise dans l'urne.
On considère la fonction Python d'en-tête `def tirage():` écrite dans le cadre ci-dessous dont le but est de renvoyer une liste correspondant aux deux tirages successifs sans remise dans l'urne.
La liste U représente le contenu de l'urne. Chaque boule est désignée par son numéro.
On suppose que la fonction `choice` a été préalablement importée de la bibliothèque `random`.
Compléter les pointillés des deux dernières instructions.

```
from random import choice

def tirage():
    U=list(range(1,10))
    L=[]
    r=choice(U)
    L.append(r)
    U.remove(r)
    s=choice(U)
    L.append(……)
    return ……
```

IV. (1 point)

Compléter l'égalité suivante pour *n* entier naturel supérieur ou égal à 2 : $\binom{n}{2} =$ ....

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

Indication orale

On attend chaque fois le nombre.

Corrigé de l'interrogation écrite du 3-5-2024

I.

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté. À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage.

1°) À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

2 118 760

Faire une phrase justificative bien rédigée.

Le nombre de groupes de 5 coureurs est égal au nombre de combinaisons de 5 éléments pris parmi 50.

$$\binom{50}{5} = 2\ 118\ 760$$

Il n'y a pas d'ordre : nombre de combinaisons de 5 éléments pris parmi 50.
Le mot important est le mot « combinaison ».

2°) À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants.

● Combien y a-t-il de groupes de 5 personnes comprenant ce coureur ?

211 876 (une seule réponse sans égalité)

Pour former un tel groupe, on choisit d'abord le coureur (nombre de combinaisons de 1 élément pris parmi 1) puis 4 coureurs différents du coureur choisi (nombre de combinaisons de 4 éléments pris parmi 49) : $\binom{1}{1} \times \binom{49}{4} = 211\ 876$.

● Calculer la probabilité pour que le coureur choisi subisse le contrôle prévu pour cette étape.

0,1 (réponse sous forme décimale sans égalité)

On est dans une situation d'équiprobabilité.
On procède par quotient. $\dfrac{211\ 876}{2\ 118\ 760} = \dfrac{1}{10} = 0,1$ (formule $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$).

3°) On suppose que la course compte n coureurs, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 5.
À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les n participants.

Calculer la probabilité pour que le coureur choisi subisse le contrôle prévu pour cette étape.

$\dfrac{5}{n}$ (réponse en fonction de n sous la forme la plus simple possible)

$$\frac{\binom{n-1}{4}}{\binom{n}{5}} = \frac{(n-1)!}{4!\times(n-5)!} \times \frac{5!\times(n-5)!}{n!} = \frac{5}{n}$$ (petits calculs avec les factorielles)

On retrouve ainsi le résultat de la question précédente pour $n=10$.

II.

Combien y a-t-il d'anagrammes des mots suivants ?

FRANCE : 720 calcul : $6!=720$

ALLEMAGNE : 45 360 calcul : $\dfrac{9!}{2!\times 2!\times 2!}=45360$

Toutes les lettres du mot FRANCE sont deux à deux distinctes.

Dans le mot ALLEMAGNE, il y a 3 groupes comportant la même lettre.

III.

Dans tout l'exercice, on considère une urne contenant 9 boules numérotées de 1 à 9.

Partie A

Dans cette partie, on s'intéresse aux tirages successifs sans remise de 3 boules dans l'urne. On note les numéros des boules dans l'ordre.

1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ? 504

2°) Combien y a-t-il de tirages qui ne contiennent aucun numéro pair ? 60

3°) Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins un numéro pair ? 444

Écrire les calculs nécessaires pour les 3 questions sur la ligne ci-dessous :

1°) $9\times 8\times 7=504$; 2°) $5\times 4\times 3=60$; 3°) 1$^{\text{ère}}$ méthode : $504-60=444$; 2$^{\text{e}}$ méthode : par disjonction de cas (à éviter)

Pour les questions 1°) et 2°), on utilise la méthode des cases.

Pour la méthode par disjonction de cas de la question 3°), il faut distinguer 3 cas :
1$^{\text{er}}$ cas : exactement 1 boule avec un numéro pair ;
2$^{\text{e}}$ cas : exactement 2 boules avec un numéro pair ;
3$^{\text{e}}$ cas : exactement 3 boules avec un numéro pair.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse aux tirages successifs sans remise de 2 boules dans l'urne. On note les numéros des boules dans l'ordre.

1°) Combien y a-t-il de tirages possibles ? 72

On utilise la méthode des cases.

$$9\times 8=72$$

2°) Combien y a-t-il de tirages tels que les numéros des deux boules ne soient pas des entiers consécutifs ? 56

On procède par disjonction de cas.

1^er^ cas : La 1^ère^ boule porte le numéro 1.
La 2^e^ boule doit alors porter le numéro 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9.
Il y a donc 7 tirages satisfaisants la condition dans ce cas.

2^e^ cas : La 1^ère^ boule porte le numéro 9.
La 2^e^ boule doit alors porter le numéro 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7.
Il y a donc 7 tirages satisfaisants la condition dans ce cas.

3^e^ cas : La 1^ère^ boule porte le numéro 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou 8.
Pour la 2^e^ boule, il y a alors $9-3=6$ choix possibles
Il y a donc $7\times 6=42$ tirages satisfaisants la condition dans ce cas.

On additionne les différents résultats : $7+7+42=56$.

3°) Combien y a-t-il de tirages ne comprenant que des numéros pairs ou multiples de 3 ? 30

Entre 1 et 9, il y a 6 entiers pairs ou multiples de 3 : 2, 3, 4, 6, 8, 9 (le « ou » est inclusif en mathématiques).

Le résultat s'obtient alors par produit $6\times 5=30$.

4°) Le but de cette question est de simuler deux tirages successifs aléatoires sans remise dans l'urne.
On considère la fonction Python d'en-tête `def tirage():` écrite dans le cadre ci-dessous dont le but est de renvoyer une liste correspondant aux deux tirages successifs sans remise dans l'urne.
La liste U représente le contenu de l'urne. Chaque boule est désignée par son numéro.
On suppose que la fonction `choice` a été préalablement importée de la bibliothèque `random`.
Compléter les pointillés des deux dernières instructions.

```
from random import choice

def tirage():
    U=list(range(1,10))
    L=[]
    r=choice(U)
    L.append(r)
    U.remove(r)
    s=choice(U)
    L.append(s)
    return L
```

IV.

Compléter l'égalité suivante pour *n* entier naturel supérieur ou égal à 2 : $\binom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.