T spécialité

Interrogation écrite du vendredi 26 avril 2024

Pas de fiche
30 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (5 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 1 point)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{(x+1)^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

On s'intéresse au domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -5$ et $x = -2$.

1°) Caractériser $\mathcal{D}$ par un système d'inéquations. Aucune justification n'est demandée.

2°) On note $\mathcal{A}$ l'aire de $\mathcal{D}$.
Exprimer $\mathcal{A}$ en unité d'aire. On détaillera le calcul sur les lignes de la feuille annexe.

…………………… (une seule égalité)

3°) On suppose que $\text{OI} = 2,5$ cm et que $\text{OJ} = 2$ cm.
Exprimer $\mathcal{A}$ en cm^2. On détaillera le calcul sur les lignes de la feuille annexe.

…………………… (une seule égalité)

II. (2 points : 1°) 1 point ; 2°) 1 point)

On admet que $\displaystyle\int_0^1 x\text{e}^x \, \text{d}x = 1$.

1°) Comment peut-on établir cette égalité ? Répondre par une phrase. On ne demande pas d'effectuer de calculs.

………

2°) À l'aide du résultat précédent, sans nouveaux calculs, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\text{e}^{x+1} \, \text{d}x$. Expliquer.

………

………

III. (3 points : 1 point + 1 point +1 point)

On admet que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

À l'aide de ce résultat, sans nouveaux calculs, déterminer les valeurs de chacune des intégrales données.
On détaillera à chaque fois la démarche.

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\left(x^2\right) \mathrm{d}x$ ……………………………………………………………………………………………

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$ ……………………………………………………………………………………………

- $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\frac{1}{x} \,\mathrm{d}x$ ……………………………………………………………………………………………

IV. (5 points : 1°) 1 point ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$. Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.

1°) Compléter la phrase : L'ensemble de définition de f est l'intervalle $I =$ ……… .

2°) En observant que pour tout réel $x \in I$ on a $f\left(x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x}\times\left(1+\sqrt{x}\right)}$, déterminer une primitive F de f sur I.

………………………………… (une seule égalité)

3°) Calculer $\displaystyle\int_1^4 f\left(x\right) \mathrm{d}x$.

………………………………… (une seule égalité)

V. (2 points : 1 point + 1 point)

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Compléter les égalités ci-dessous. On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \times \sin^n x \,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \times \sin^n x \,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

VI. (2 points)

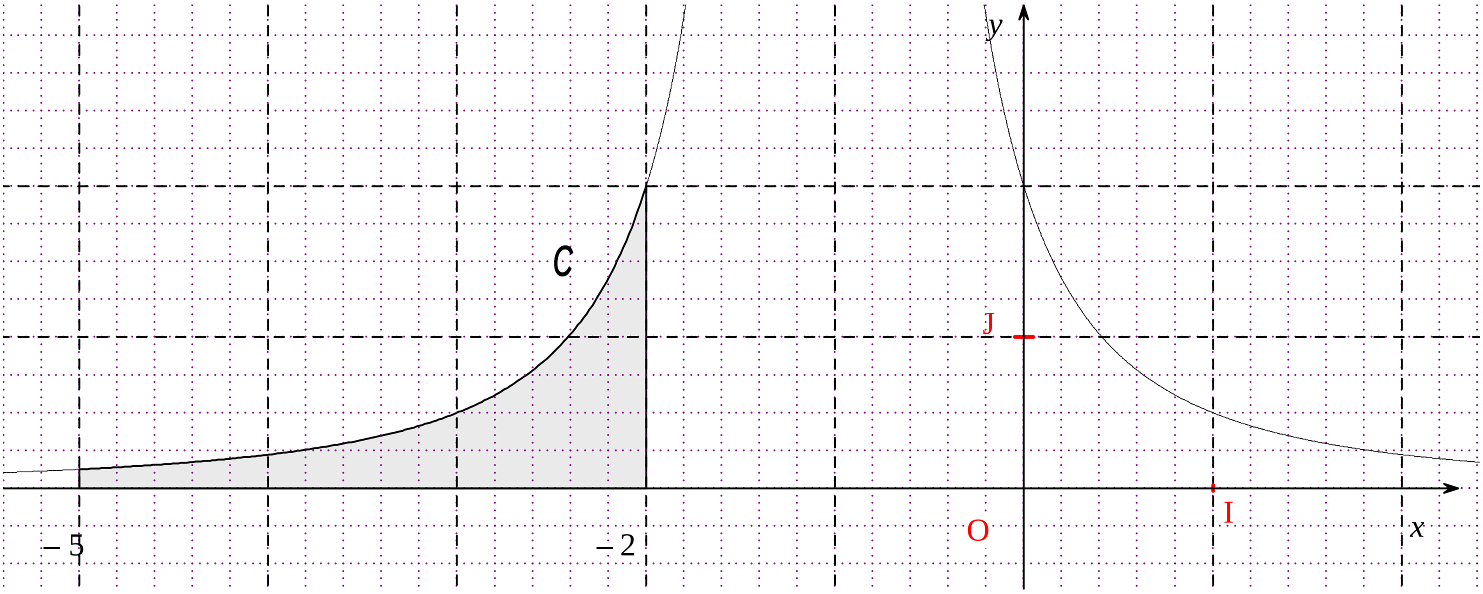
On considère la fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{2-t}} \,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $I = \left]-\infty\,;2\right[$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.
Compléter l'égalité : $\forall x \in I \quad \mathrm{F}'\left(x\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Feuille annexe de l’interrogation écrite du vendredi 26 avril 2024

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ……………………………………………….

I.



……

……

……

……

……

……

……

……

……

Indications :

● L’usage du symbole d’équivalence est interdit.

● Il est demandé de tirer les traits de fractions à la règle.

● Pour les calculs d’intégrales, écrire directement les calculs sans détailler la recherche de primitives.

I.

2°) On attend une réponse sous la forme suivante :

$$\mathcal{A} = \dots \text{ u. a.}$$

3°) On attend une réponse sous la forme suivante :

$$\mathcal{A} = \dots \text{ cm}^2.$$

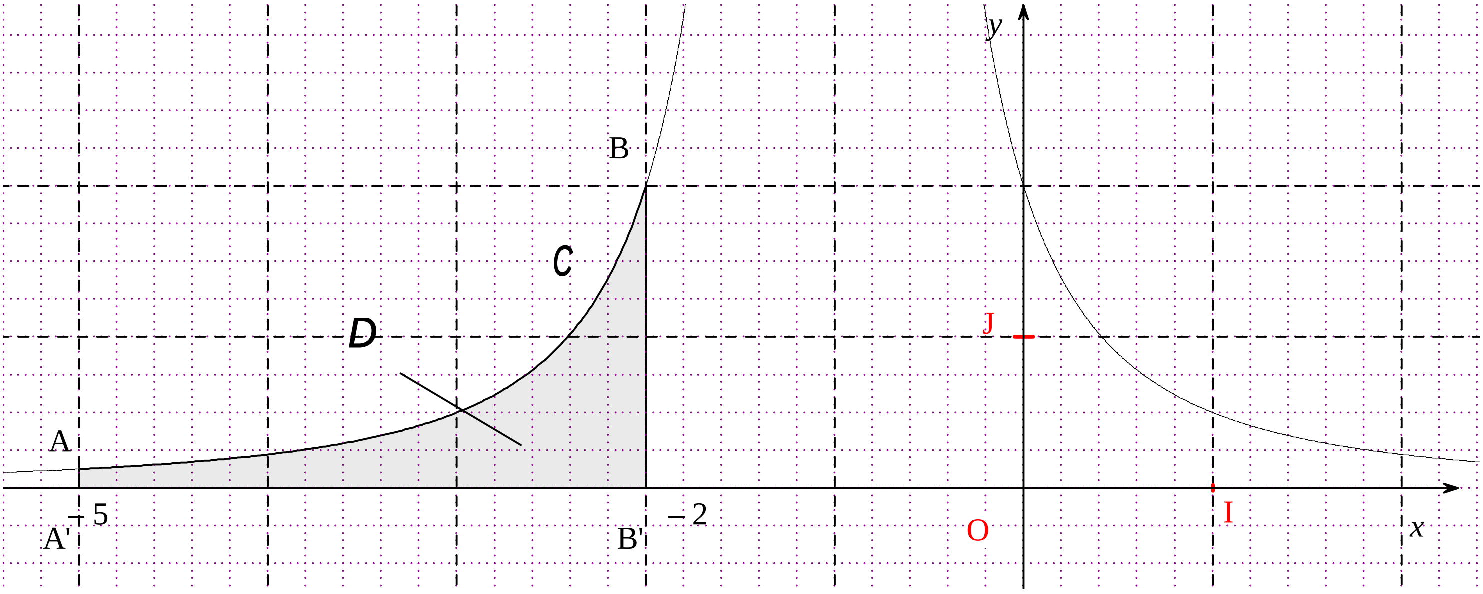
III. On attend le détail de la démarche sur chaque ligne.

IV.

2°) On donnera la réponse sans justifier.

I.

Soit A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives – 5 et – 2.
On note A' et B' leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses.



$\mathcal{D}$ est limité par les segments $[AA']$, $[BB']$, $[A'B']$ et l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Les frontières sont comprises.

Corrigé de l'interrogation écrite du 26-4-2024

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2}{(x+1)^2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

On s'intéresse au domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-5$ et $x=-2$.

1°) Caractériser $\mathcal{D}$ par un système d'inéquations. Aucune justification n'est demandée.

$$\begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant -2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{2}{(x+1)^2} \end{cases}$$

$\mathcal{D}$ est le domaine « sous la courbe » $\mathcal{C}$.

Le système est formé de deux conditions : $\begin{cases} -5 \leqslant x \leqslant -2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$.

2°) On note $\mathcal{A}$ l'aire de $\mathcal{D}$.
Exprimer $\mathcal{A}$ en unité d'aire. On détaillera le calcul sur les lignes de la feuille annexe.

$$\mathcal{A} = \frac{3}{2} \text{ u. a. (une seule égalité)}$$

On cherche l'aire « sous la courbe » $\mathcal{C}$.

On utilise une intégrale.

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_{-5}^{-2} f(x)\,\text{d}x$ (car la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[-5\,;-2]$)

$$\begin{aligned}
&= \int_{-5}^{-2} \frac{2}{(x+1)^2}\,\text{d}x \\
&= \left[-\frac{2}{x+1}\right]_{-5}^{-2} \\
&= \left(-\frac{2}{-2+1}\right) - \left(-\frac{2}{-5+1}\right) \\
&= -\frac{2}{-1} - \left(-\frac{2}{-4}\right) \\
&= 2 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2} \text{ u. a.}
\end{aligned}$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

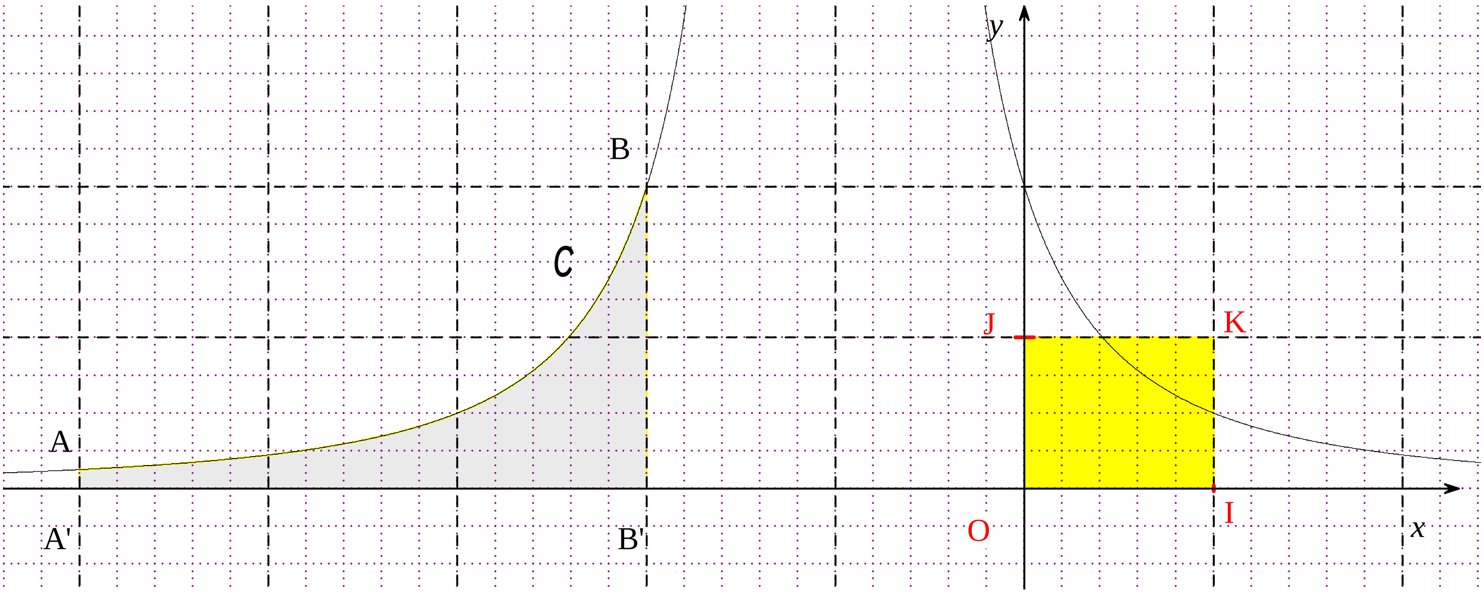
3°) On suppose que $OI = 2,5$ cm et que $OJ = 2$ cm.
Exprimer $\mathcal{A}$ en cm^2. On détaillera le calcul sur les lignes de la feuille annexe.

$$\mathcal{A} = 7,5 \text{ cm}^2 \text{ (une seule égalité)}$$

Il faut se référer à la définition de l'unité d'aire.

Par définition, l'unité d'aire associée au repère (en abrégé u. a.) est l'aire du rectangle OIKJ où K désigne le point de coordonnées $(1\,;1)$.

graphique :



$\mathcal{A}_{\text{OIKJ}} = OI \times OJ$

$= (2,5 \text{ cm}) \times (2 \text{ cm})$

$= 5 \text{ cm}^2$

On en déduit la correspondance $1 \text{ u. a.} = 5 \text{ cm}^2$.

On reprend donc le résultat de la question précédente et on le multiplie par 5.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{3}{2} \times 5 \text{ cm}^2 \\ &= \frac{15}{2} \text{ cm}^2 \\ &= 7,5 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

On peut aussi présenter le calcul ainsi :

$1 \text{ u. a.} = OI \times OJ$

$= (2,5 \text{ cm}) \times (2 \text{ cm})$

$= 5 \text{ cm}^2$

On peut aussi effectuer directement le calcul comme suit :

$\mathcal{A} = \dfrac{3}{2} \times 2{,}5 \times 2 \text{ cm}^2$, ce ui donne $\mathcal{A} = 3 \times 2{,}5 \text{ cm}^2$, soit finalement $\mathcal{A} = 7{,}5 \text{ cm}^2$.

II.

On admet que $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = 1$.

1°) Comment peut-on établir cette égalité ? Répondre par une phrase. On ne demande pas d'effectuer de calculs.

On établit cette égalité grâce à la formule d'intégrations par parties rappelée dans le cadre ci-dessous.

Soit *u* et *v* deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle *I* telles que u' et v' soient continues sur *I*. *a* et *b* ont deux réels quelconques dans I. On a : $\displaystyle\int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x = \left[u(x)\, v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x$.

Avec les notations de la formule, on choisit une fonction *u* telle que $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et la fonction *v* définie par $v(x) = x$.
On peut prendre $u(x) = \mathrm{e}^x$. La dérivée de *v* est donnée par $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x &= \left[x\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= 1 \times \mathrm{e}^1 - 0 \times \mathrm{e}^0 - \int_0^1 \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e} - \left[\mathrm{e}^x\right]_0^1 \\ &= \mathrm{e} - \left(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0\right) \\ &= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

2°) À l'aide du résultat précédent, sans nouveaux calculs, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x+1} \, \mathrm{d}x$. Expliquer.

On va utiliser l'égalité $x\mathrm{e}^{x+1} = x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}$.

On utilise également la linéarité de l'intégrale.

$$\int_0^1 x\mathrm{e}^{x+1} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} \int_0^1 x\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e} \times 1 = \mathrm{e}$$

III.

On admet que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

À l'aide de ce résultat, sans nouveaux calculs, déterminer les valeurs de chacune des intégrales données.
On détaillera à chaque fois la démarche.

On utilise les propriétés du logarithme népérien : logarithme d'un carré, logarithme d'une racine carrée, logarithme d'un inverse.

• $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\left(x^2\right) \mathrm{d}x$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\left(x^2\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\times 2\ln x \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} 2x\ln x \, \mathrm{d}x = 2\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \, \mathrm{d}x = 2\times\frac{\mathrm{e}^2+1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{2}$$

• $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\times\frac{1}{2}\ln x \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2}x\ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times\frac{\mathrm{e}^2+1}{4} = \frac{\mathrm{e}^2+1}{8}$$

• $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln\frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} x\times\left(-\ln x\right) \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \left(-x\ln x\right) \mathrm{d}x = -\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$$

$$x\ln\left(x^2\right) = x\times 2\ln x = 2x\ln x$$

$$x\ln\left(\sqrt{x}\right) = x\times\frac{1}{2}\ln x = \frac{1}{2}x\ln x$$

$$x\ln\frac{1}{x} = x\times\left(-\ln x\right) = -x\ln x$$

On vérifie tous les résultats à l'aide de la calculatrice.

On utilise la linéarité de l'intégrale.

IV.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$. Aucune justification n'est demandée dans cet exercice.

1°) Compléter la phrase : L'ensemble de définition de f est l'intervalle $I =]0\,;+\infty[$.

$$f(x) \text{ existe} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+\sqrt{x} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

On est amené à résoudre l'équation $x+\sqrt{x}=0$.
On obtient aisément que la seule solution est 0 (en factorisant par exemple le membre de gauche de manière à obtenir une équation « produit nul »).

On vérifie en traçant la représentation graphique de f sur l'écran de la calculatrice.

2°) En observant que pour tout réel $x \in I$ on a $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}\times\left(1+\sqrt{x}\right)}$, déterminer une primitive F de f sur I.

$$\mathrm{F}(x)=2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) \quad \text{(une seule égalité)}$$

On effectue la réécriture $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=2\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\times\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=2\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}}$.

On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$.

Une primitive de f sur I est donc la fonction F définie sur I par $\mathrm{F}(x)=2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|$.

On peut enlever les barres de valeur absolue car $\forall x \in I \quad 1+\sqrt{x}>0$.

Ainsi, $\forall x \in I \quad \mathrm{F}(x)=2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$.

3°) Calculer $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln\frac{3}{2} \quad \text{(une seule égalité)}$$

$$\int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{F}(x)\right]_1^4$$

$$= \left[2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right]_1^4$$

$$= 2\left[\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right]_1^4 \quad \text{(mieux : sortir le 2 des crochets)}$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{4}+1\right) - 2\ln\left(\sqrt{1}+1\right)$$

$$= 2\ln 3 - 2\ln 2$$

$$= 2\ln\frac{3}{2}$$

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

V.

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
Compléter les égalités ci-dessous. On donnera les résultats sous la forme la plus simple possible.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \times \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \qquad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \times \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \times \sin^n x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \quad \text{(la primitive s'obtient en reconnaissant la forme } u'u^n\text{)}$$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{0}{n+1}$$

$$= \frac{\sin^{n+1}\frac{\pi}{2}}{n+1} - \frac{\sin^{n+1} 0}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - 0$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x \times \sin^n x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^{n+1} x}{n+1} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= \frac{0^{n+1}}{n+1} - \frac{\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{0}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$= -\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n} \times (-1)^{2}}{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n} \times 1}{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^{n}}{n+1}$$ (c’est la forme la simple du résultat que l’on puisse donner)

VI.

On considère la fonction F : $x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{2-t}}\, dt$ sur l'intervalle $I =]-\infty\,;2[$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

Compléter l'égalité : $\forall x \in I \quad F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2-x}}$

$\forall x \in I \quad F(x) = \int_0^x \frac{e^t}{\sqrt{2-t}}\, dt$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale. Il n'est pas possible de déterminer l'expression d'une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{2-t}}$.

Considérons la fonction u : $t \mapsto \frac{e^t}{\sqrt{2-t}}$.

La fonction u est continue sur l'intervalle I (quotient de deux fonctions continues sur I, celle du dénominateur ne s'annulant pas sur I).

De plus, $\forall x \in I \quad F(x) = \int_0^x u(t)\, dt$.

D'après le théorème du cours (théorème fondamental de l'analyse), F est dérivable sur I et $\forall x \in I \quad F'(x) = u(x)$

soit $\forall x \in I \quad F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2-x}}$.

On peut dire que F est la primitive de u qui s'annule en 0.

Théorème (appelé parfois « théorème fondamental de l'analyse »)

Soit u une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit a un réel fixé dans I.
La fonction F : $x \mapsto \int_a^x u(t)\, dt$ est dérivable sur I et $\forall x \in I \quad F'(x) = u(x)$.