T spécialité

Interrogation écrite du mardi 16 mai 2023

50 minutes

Numéro : ….. **Prénom et nom :** ………………………………………………… **Note : ….. / 20**

I. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\ \mathrm{I},\ \mathrm{J})$. On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=4$.

……………………

II. (2 points)

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\ \mathrm{I},\ \mathrm{J})$. On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$.

……………………

III. (2 points : 1 point par intégrale)

Compléter les égalités suivantes : $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ldots\ldots\ldots$, $\displaystyle\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{2x-1}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots$.

Écrire le détail des calculs au verso de la feuille annexe.

IV. (2 points)

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter l'égalité suivante : $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{x}-1\right)^{n}\,\mathrm{d}x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

V. (1 point)

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I=[-1\,;2]$ dont la valeur moyenne sur I est égale à 4.

Quelle est la valeur de $\int_{-1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$?

……… (une seule réponse sans égalité)

VI. (6 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points ; 3°) 2 points)

Pour tout réel a, on pose $I(a)=\int_{0}^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{x}+1}\ \mathrm{d}x$.

On écrira les trois résultats dans les cases du tableau ci-dessous.

1°) Calculer $I(1)$.

2°) Calculer $I(2)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{x}+1}=\mathrm{e}^{x}-\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$.

3°) Calculer $I(-1)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+1}=\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ puis utiliser ensuite une égalité analogue à celle donnée dans la question précédente.

…………………………………	…………………………………	…………………………………

VII. (4 points : 1°) 2 points ; 2°) 2 points)

Soit a un réel strictement positif donné. On pose $I(a)=\int_{1}^{a} \frac{\mathrm{e}^{x}}{x}\ \mathrm{d}x$ et $J(a)=\int_{1}^{a} \ln x\times\mathrm{e}^{x}\ \mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à calculer $I(a)$ et $J(a)$.

1°) Quel est le signe de $I(a)$ et $J(a)$ pour a réel quelconque strictement supérieur à 1 ?

…………

2°) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I(a)$ en fonction de $J(a)$.

………………………………

VIII. (1 point)

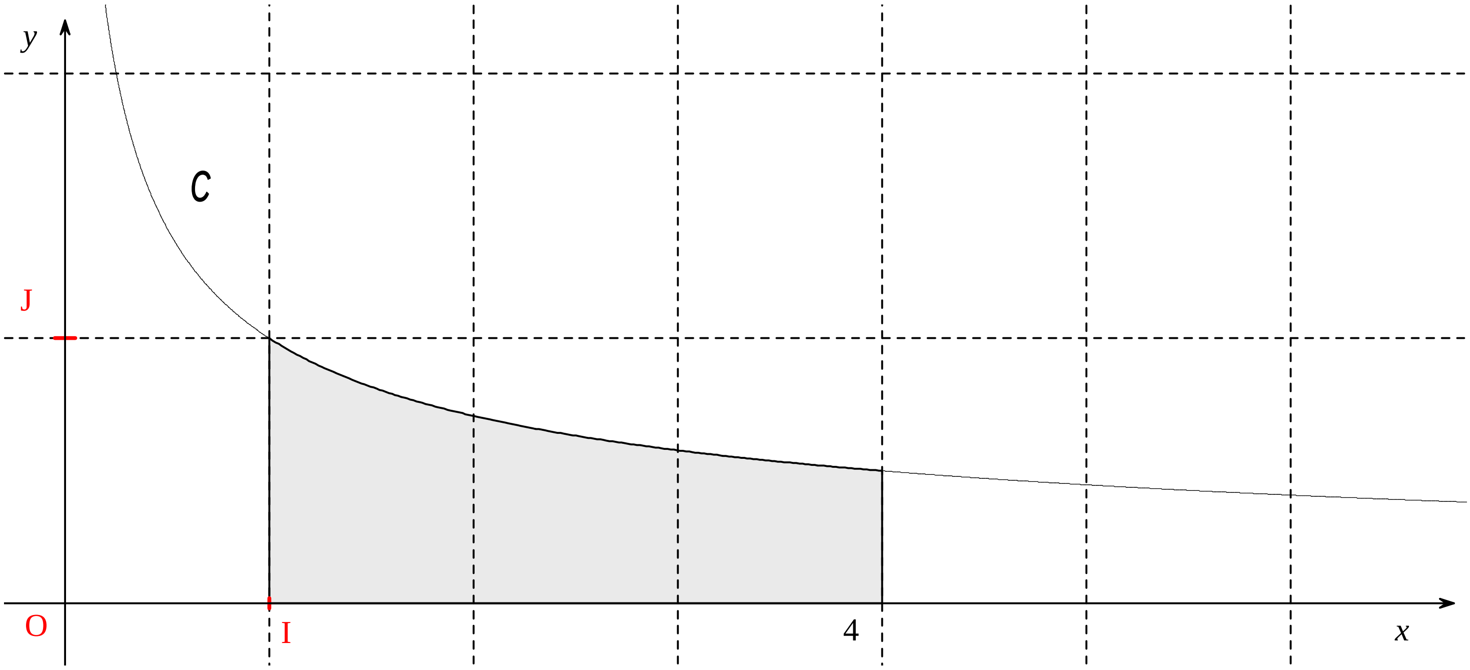
On considère la fonction F : $x\mapsto \int_{1}^{x} \frac{\ln t}{1+t^{2}}\ \mathrm{d}t$ sur l'intervalle $D=]0\,;+\infty[$.

Compléter l'égalité : $\forall x\in D\quad \mathrm{F}'(x)=$..................

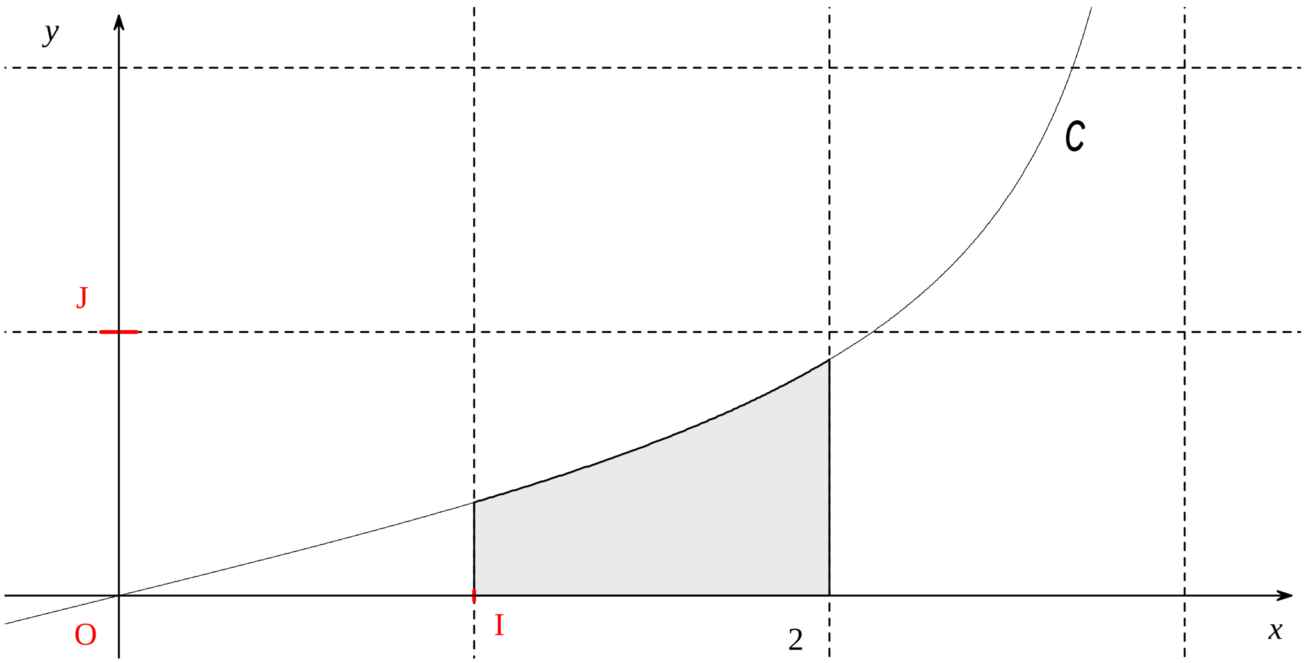
Feuille annexe de l'interrogation écrite du mardi 16 mai 2023

Numéro : ….. **Prénom et nom : ……………………………………………….**

I.



II.



Corrigé de l'interrogation écrite du 16-5-2023

I.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$.

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^4 f(x)\,\text{d}x$ (car la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;4]$)

$= \left[2\sqrt{x}\right]_1^4$

$= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$

$= 2 \times 2 - 2 \times 1$

$= 4 - 2$

$= 2$ u. a.

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

II.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On se référera au graphique donné sur la feuille annexe.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unité d'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\text{d}x$ (car la fonction f est positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;2]$)

$= \left[-\sqrt{9 - x^2}\right]_1^2$ (on écrit $f(x) = -\dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2x}{\sqrt{9 - x^2}}$)

$= -\sqrt{9 - 2^2} + \sqrt{9 - 1^2}$

$= \sqrt{8} - \sqrt{5}$

$= 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ u. a.

On vérifie le résultat à l'aide de la calculatrice.

III.

Compléter les égalités suivantes : $\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x} = -\ln 2$, $\int_{0}^{1} e^{2x-1}\, dx = \frac{e - e^{-1}}{2}$.

Écrire le détail des calculs au verso de la feuille annexe.

$$\int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x} = \left[\ln|\, x\,|\right]_{-4}^{-2}$$ (on notera la présence de barres de valeur absolue indispensable ici)

$$= \ln|-2| - \ln|-4|$$

$$= \ln 2 - \ln 4$$

$$= \ln 2 - 2\ln 2$$

$$= -\ln 2$$

$$\int_{0}^{1} e^{2x-1}\, dx = \left[\frac{e^{2x-1}}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{2x-1}\right]_{0}^{1}$$ (ligne facultative)

$$= \frac{e^{1} - e^{-1}}{2}$$ (on peut aussi écrire $\frac{1}{2}e^{1} - \frac{1}{2}e^{-1}$)

$$= \frac{e - e^{-1}}{2}$$

Une autre forme possible est : $\int_{0}^{1} e^{2x-1}\, dx = \frac{e^{2} - 1}{2e}$. C'est le résultat que donne la calculatrice Numworks quand on tape l'expression $\frac{e - e^{-1}}{2}$

On vérifie les résultats à l'aide de la calculatrice.

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2x-1}\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}}{2}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2\mathrm{e}}$$ (résultat de la calculatrice pas intéressant)

IV.

Soit n un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.

Compléter l'égalité suivante : $\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^n\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible.

$$\int_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^n\ \mathrm{d}x = \left[\frac{\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\ln 2}$$ (forme $u' \times u^n$)

$$= \frac{\left(\mathrm{e}^{\ln 2} - 1\right)^{n+1}}{n+1} - \frac{\left(\mathrm{e}^0 - 1\right)^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

V.

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $I = [-1\,;2]$ dont la valeur moyenne sur I est égale à 4.

Quelle est la valeur de $\int_{-1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$?

12 (une seule réponse sans égalité)

On se réfère à la définition de la valeur moyenne d'une fonction.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ $(a < b)$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a\ ;\ b]$ le réel $\boldsymbol{\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$.

On a : $4 = \dfrac{1}{2-(-1)} \times \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$ soit $4 = \dfrac{1}{3} \times \displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\ \mathrm{d}x = 3 \times 4 = 12$.

On peut noter éventuellement μ la valeur moyenne de f sur I.

VI.

Pour tout réel a, on pose $I(a) = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^x + 1}\ \mathrm{d}x$.

On écrira les trois résultats dans les cases du tableau ci-dessous.

1°) Calculer $I(1)$.

2°) Calculer $I(2)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1} = \mathrm{e}^x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

3°) Calculer $I(-1)$.

Indication : Vérifier d'abord que pour tout réel x on a : $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{\mathrm{e}^{-x} + 1}$ puis utiliser ensuite une égalité analogue à celle donnée dans la question précédente.

$I(1) = \ln\dfrac{3}{2}$	$I(2) = 1 + \ln\dfrac{2}{3}$	$I(-1) = \dfrac{1}{2} + \ln 3 - 2\ln 2$

$$I(1)=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$

$$=\left[\ln\left|\,e^x+1\,\right|\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\ln\left(e^{\ln 2}+1\right)-\ln\left(e^0+1\right)$$

$$=\ln 3-\ln 2$$

$$=\ln\frac{3}{2}$$

$$I(2)=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(e^x-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx$$ (on utilise l'égalité $\frac{e^{2x}}{e^x+1}=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$ valable pour tout réel x)

$$=\left[e^x-\ln\left|\,e^x+1\,\right|\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left[e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\ln 2}$$

$$=e^{\ln 2}-\ln\left(e^{\ln 2}+1\right)-e^0+\ln\left(e^0+1\right)$$

$$=1-\ln 3+\ln 2$$

$$=1+\ln\frac{2}{3}$$

$$I(-1)=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{-x}}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}\,dx \quad \text{(on utilise l'égalité } \frac{e^{-x}}{e^x+1}=\frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1} \text{ valable pour tout réel } x\text{)}$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}-\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx \quad \text{(on utilise l'égalité } \frac{e^{2x}}{e^x+1}=e^x-\frac{e^x}{e^x+1} \text{ qui donne } \frac{e^{-2x}}{e^{-x}+1}=e^{-x}-\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

en remplaçant x par $-x$)

$$=\left[-e^{-x}+\ln\left|e^{-x}+1\right|\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)-e^{-x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\ln\left(e^{-\ln 2}+1\right)-e^{-\ln 2}-\ln\left(e^0+1\right)+e^0$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}-\ln 2+1$$

$$=\ln\frac{3}{2}-\ln 2+\frac{1}{2}$$

$$=\ln 3-\ln 2-\ln 2+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+\ln 3-2\ln 2$$

Autre forme possible du résultat : $I(-1)=\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{4}$

VII.

Soit a un réel strictement positif donné. On pose $I(a)=\int_1^a \frac{e^x}{x}\,dx$ et $J(a)=\int_1^a \ln x\times e^x\,dx$.

On ne cherchera pas à calculer $I(a)$ et $J(a)$.

On peut noter que $I(1)=J(1)=0$ de manière évidente.

1°) Quel est le signe de $I(a)$ et $J(a)$ pour a réel quelconque strictement supérieur à 1 ?

$\forall x \in [1\,;\,a]$ $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant 0$ et $\ln x \times \mathrm{e}^x \geqslant 0$ (on peut justifier en faisant une analyse du signe des différents « éléments » qui interviennent dans le quotient pour la première inégalité et dans le produit pour la deuxième inégalité).

Les bornes des intégrales qui définissent $I(a)$ et $J(a)$ sont dans le « bon » sens puisque $a > 1$ par hypothèse, on en déduit que $I(a) \geqslant 0$ et $J(a) \geqslant 0$ (propriété du signe d'une intégrale).

Il serait possible de démontrer que $I(a) > 0$ et $J(a) > 0$ en utilisant une propriété des intégrales qui sera vue dans le supérieur.

2°) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $I(a)$ en fonction de $J(a)$.

On utilise la formule d'intégration par parties.

On considère la fonction u définie par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et une fonction v telle que $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
On peut choisir la fonction v définie par $v(x) = \ln x$ (comme a est strictement positif, l'intervalle fermé borné d'extrémités 1 et a est inclus dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$; la présence d'une valeur absolue n'est donc pas utile).

On a alors :
$u(x) = \mathrm{e}^x$; $v'(x) = \dfrac{1}{x}$
$u'(x) = \mathrm{e}^x$; $v(x) = \ln x$.

$$I(a) = \int_1^a \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \left(I(a) = \int_1^a u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \Big[\ \ln x \times \mathrm{e}^x\ \Big]_1^a - \int_1^a \ln x \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln a \times \mathrm{e}^a - \ln 1 \times \mathrm{e}^1 - \int_1^a \ln x \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln a \times \mathrm{e}^a - \int_1^a \ln x \times \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

$$= \ln a \times \mathrm{e}^a - J(a)$$

VIII.

On considère la fonction F : $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ sur l'intervalle $D =]0\,;+\infty[$.

Compléter l'égalité : $\forall x \in D \quad \mathrm{F}'(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$

$$\forall x \in D \quad \mathrm{F}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

On ne cherche pas à calculer l'intégrale. Il n'est pas possible de déterminer l'expression d'une primitive de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$.

Considérons la fonction u : $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+t^2}$.

La fonction u est continue sur D (quotient de deux fonctions continues sur D, celle du dénominateur ne s'annulant pas sur D).

De plus, $\forall x \in D \quad \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_1^x u(t)\,\mathrm{d}t$.

D'après le théorème du cours (théorème fondamental de l'analyse), F est dérivable sur D et $\forall x \in D \quad \mathrm{F}'(x) = u(x)$ soit $\forall x \in D \quad \mathrm{F}'(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On peut dire que F est la primitive de u qui s'annule en 1.