Vecteurs de l'espace

I. Généralités

Notion de vecteur

Direction, sens, norme (notation)

Égalités de deux vecteurs

Égalité du parallélogramme

II. Vecteurs colinéaires. Vecteurs coplanaires

2 notions importantes :

- vecteurs colinéaires
- vecteurs coplanaires

1°) Vecteurs colinéaires

Définition :

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont colinéaires s'ils existent 4 points A, B, C, D d'une même droite tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$.

Vocabulaire :
On dit que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ ou que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$.

Attention, on ne peut pas dire que deux vecteurs sont parallèles.

Propriétés :

● Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs de l’espace.

La démonstration évidente avec la définition.

● Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction (mais pas forcément le même sens).

● Soit A, B, C, D quatre points de l’espace tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.
$\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$ (vecteurs) si et seulement si $(AB) // (CD)$ (droites).

Attention on ne peut pas dire que deux vecteurs de l’espace sont parallèles.

● Soit A, B, C trois points de l’espace.
A, B, C sont alignés (points) si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires (vecteurs).

2°) Vecteurs coplanaires

→ Rappel :

Définition [points coplanaires]

On dit que quatre points A, B, C, D sont **coplanaires** lorsqu’ils sont situés dans un même plan.

On a également vu la notion de droites coplanaires (droites contenues dans un même plan).

→ Dans ce paragraphe, on s’intéresse à une nouvelle notion : les vecteurs coplanaires.

a) Définition [vecteurs coplanaires]

On s'intéresse à un « ensemble » de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace.

On dit que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace sont coplanaires pour exprimer qu'il existe des points A, B, C, D, E, F de l'espace, tous situés dans un même plan P tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$.

b) Commentaires

La définition établit un lien entre points coplanaires et vecteurs coplanaires.
Elle fournit une condition suffisante pour que trois vecteurs de l'espace soient coplanaires.
On peut formuler cette condition suffisante sous la forme de la propriété suivante :

Des vecteurs définis par des points d'un même plan sont coplanaires.

Cette propriété peut aussi être énoncée sous la forme suivante :

Si A, B, C, D, E, F sont des points coplanaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.

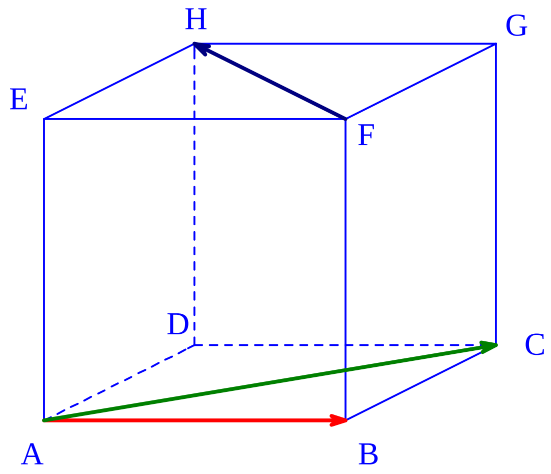
On peut utiliser cette propriété pour démontrer que des vecteurs sont coplanaires (voir exemple).

La réciproque de cette propriété est fausse comme va nous le montrer l'exemple suivant.

c) Exemple et contre-exemple

On considère un cube ABCDEFGH.

● On s'intéresse aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FH}$. Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?



On va utiliser un autre représentant du vecteur $\overrightarrow{FH}$.

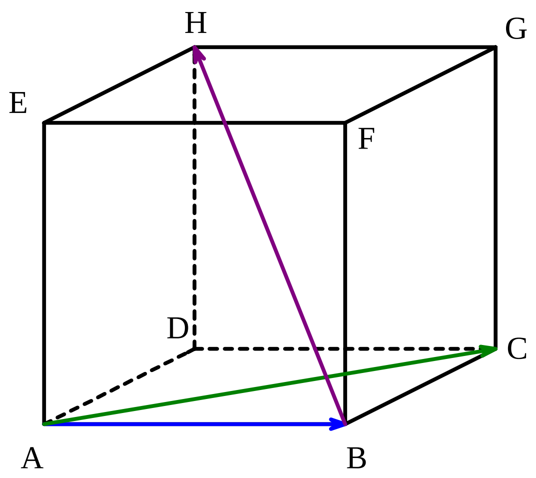
On se ramène à des vecteurs définis par des points tous coplanaires.

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ (l'idée à retenir, c'est que l'on peut « déplacer » les vecteurs dans l'espace ; ici, on a translaté les points F et H).

Les points A, B, C, D sont coplanaires (ils sont tous situés dans le plan (ABC)) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires.

On peut observer que les points A, B, C, F, H ne sont pas coplanaires. Néanmoins, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{FH}$ sont coplanaires.

● On s'intéresse aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BH}$. Ces trois vecteurs sont-ils coplanaires ?



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BH}$ ne sont pas coplanaires.

Ce n'est pas évident à justifier avec la définition 1. On peut juste le « visualiser ».

d) Propriété [condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs de l'espace ayant la même origine soient coplanaires]

Soit A, B, C, D quatre points de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ (vecteurs) sont coplanaires si et seulement les points A, B, C, D sont coplanaires (points).

Démonstration :
Implication de gauche à droite :
On introduit des points I, J, K, L, M, N situés dans un même plan *P* tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MN}$ (on sait qu'il existe de tels points par définition de vecteurs coplanaires).
On note ensuite *Q* le plan passant par A et parallèle à *P*.
On justifie rapidement que B, C, D appartiennent à *Q*.
Ainsi A, B, C, D sont coplanaires.

Implication de droite à gauche : évidente

e) Propriété [condition suffisante pour que trois vecteurs de l'espace ne soient pas coplanaires]

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Si deux des trois vecteurs sont colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

f) Vocabulaire

On ne dit pas que :
- des vecteurs sont contenus dans un plan ;
- des vecteurs appartiennent à un plan ;
- des vecteurs sont inclus dans un plan.

On dit qu'ils admettent un représentant dont l'origine et l'extrémité sont dans un plan *P*.

g) Propriété

Soit A, B, C, D, E, F des points de l'espace.
On suppose que :
A et B appartiennent à un plan P_1 ;
C et D appartiennent à un plan P_2 ;
E et F appartiennent à un plan P_3.
Si les plans P_1, P_2, P_3 sont parallèles, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires.

Une dernière caractérisation :

On suppose que $A \neq B$, $C \neq D$, $E \neq F$.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont coplanaires si et seulement si les droites (AB), (CD), (EF) sont parallèles à un même plan.

III. Opérations sur les vecteurs de l'espace

Addition de deux vecteurs

Relation de Chasles

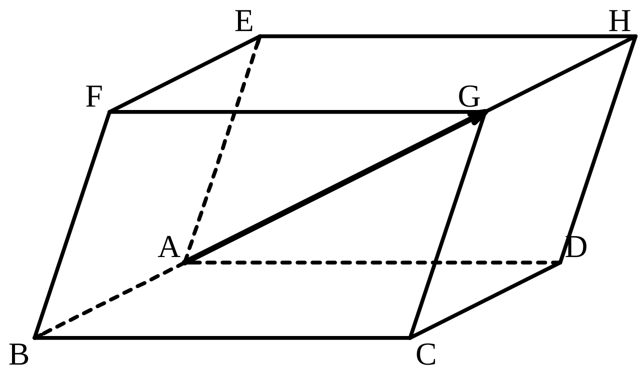
Configuration du parallélogramme

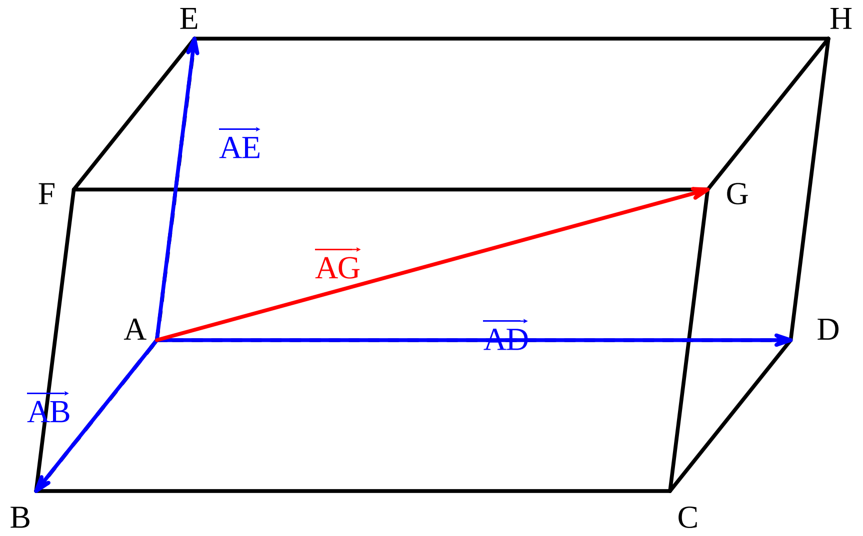
Dans un parallélogramme, on peut écrire plusieurs additions de vecteurs.
Par exemple, pour un parallélogramme ABCD, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$ etc.

Configuration du parallélépipède.

Parallélépipède

ABCDEFGH est un parallélépipède (solide dont les 6 faces sont des parallélogrammes).
Le parallélogramme EFGH est l'image de ABCD par une translation.
On a $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DH}$.





On a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme.

D'où $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$.

Remarque :

L'égalité du parallélépipède peut être écrite à partir de n'importe quel sommet du parallélépipède.

Un parallélépipède est un prisme particulier.
Un prisme est un solide géométrique délimité par deux polygones, appelés les bases du prisme, images l'un de l'autre par une translation. Ces bases sont reliées entre elles par des parallélogrammes.
Quand ces parallélogrammes sont des rectangles, on dit que le prisme est droit.
En géométrie affine, un prisme est un cas particulier de polyèdre. C'est un cylindre dont la base est polygonale.
Le patron d'un parallélépipède n'est pas évident à réaliser. On peut se référer à l'article Wikipedia.

Opposé d'un vecteur

Soustraction

Multiplication par un réel

Formule $\left\| \lambda \vec{u} \right\| = \left| \lambda \right| \times \left\| \vec{u} \right\|$ (formule fondamentale de norme du produit d'un vecteur par un réel)

Milieu et vecteurs

Égalité $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

IV. <u>Retour sur vecteurs colinéaires et coplanaires</u>

1°) Vecteurs colinéaires

Propriété 1 [condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs de l'espace soient colinéaires]

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ et $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Propriété 1 bis

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

2°) Vecteurs coplanaires

Définition [combinaison linéaire de deux vecteurs]

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
On appelle combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur $\vec{w}$ de l'espace qui peut s'écrire $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où λ et μ sont deux réels.

Propriété 2 [condition nécessaire et suffisante pour que trois vecteurs de l'espace soient coplanaires]

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'un des trois vecteurs peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux autres.

Propriété 2 bis

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs quelconques de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\vec{w}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Configurations

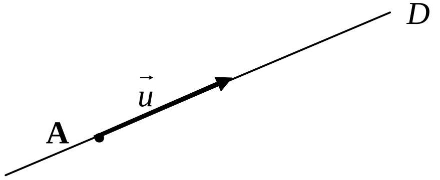
Nom	Notations utilisées	Figure	Caractérisation
Parallélogramme	ABCD parallélogramme		AB=DC AB+AD=AC
Milieu d'un segment	I ; milieu de [AB]		AI=IB AB=2AI IA+IB=0
Milieux dans un triangle	A,B,C 3 points I milieu de [AB] J milieu de [AC]		IJ=1/2BC
Centre de gravité	ABC :triangle G : Centre de gravité (ppoint de concours des trois médianes)		GA+GB+GC=0
Droite	A et B sont 2 points distincts		M appartient à (AB) ⇔AM et AB sont colinéaires ⇔il existe un réel k tel que AM=kAB
Demi-droite fermé	A et B sont deux points distincts		M appartient à [AB) ⇔il existe un réel k>=0 tel que AM=kAB
Segment fermé	A et B sont deux points distincts		M appartient à [AB] ⇔il existe un réel k appartenant à [0,1] tel que AM=kAB
Plan	A, B, C sont trois points non alignés		$M \in (ABC) \Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ On notera que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Définition [combinaison linéaire de deux vecteurs]

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.
On appelle combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tout vecteur $\vec{w}$ qui peut s'écrire $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ où λ et μ sont deux réels.

Définition d'une droite par un point et un vecteur non nul

A est un point quelconque de l'espace.
$\vec{u}$ est un vecteur non nul.



- L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires est la droite D passant par A dont la direction est celle du vecteur $\vec{u}$.

- On dit que D est la droite de **repère** $(A, \vec{u})$.

origine **vecteur unité**

Autre formulation :

On dit que D est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (ou de repère $(A, \vec{u})$).

Définition d'un vecteur directeur d'une droite

Un **vecteur directeur** d'une droite D de l'espace est un vecteur non nul qui a la même direction que D.

Vocabulaire :

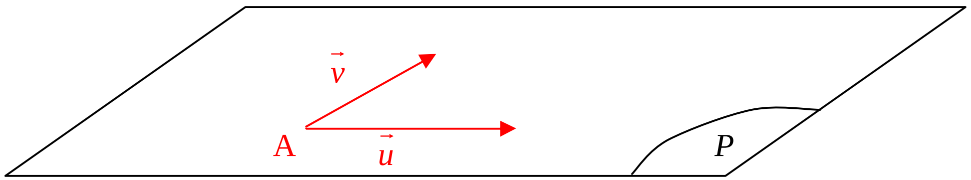
Pour tout point M de D, il existe un unique réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$.

λ est appelé l'abscisse de M dans le repère $(A, \vec{u})$.

On retiendra l'équivalence : $M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Définition vectorielle d'un plan

A est un point quelconque de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace.



L'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires est le plan passant par A contenant les droites de repères $(A, \vec{u})$ et $(A, \vec{v})$.

- On dit que *P* est le plan de **repère** $(A, \vec{u}, \vec{v})$.

origine vecteurs de base

Vocabulaire :

Pour tout point M de *P*, $\overrightarrow{AM}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Il existe donc deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.
Les réels λ et μ sont les coordonnées de M dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$: λ est l'abscisse de M et μ est l'ordonnée de M.

On retiendra l'équivalence : $M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont coplanaires.

Caractérisation du parallélisme d'une droite et d'un plan

Soit *P* un plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et *D* une droite de repère $(B, \vec{w})$.

D est parallèle à *P* si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires c'est-à-dire si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$.