Prénom :…………………………. **Nom** :……………………………………………

1$^{\text{ère}}$ S

Contrôle du jeudi 8 février 2007 (3 heures)

La calculatrice n'est pas autorisée.

I. (7 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{(x+1)^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : le centimètre).

1°) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et démontrer que, pour tout réel $x\neq -1$, on a

$$f'(x)=2\frac{x\left(x^2+3x+3\right)}{(x+1)^3}.$$

2°) Dresser le tableau de variations de f.

3°) Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en -1. Que peut-on déduire de cette dernière limite ?

4°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une droite Δ dont on donnera l'équation réduite pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

5°) Tracer $\mathcal{C}$ et ses éléments remarquables.

On complétera le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-2	$-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	1
$f(x)$					

6°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -2.

Déterminer une équation de la tangente T au point A. Tracer T.

II. (4 points)

On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$; f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$;

$$f(0)=4\ ;\ f(2)=2\ ;\ f'(2)=-\frac{1}{2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=0\ ;\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=3.$$

On note g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Compléter directement sur cette feuille le tableau ci-dessous **sans justifier**.

L'ensemble de définition de g est égal à	
Le nombre dérivé de f en 0 est égal à	
La limite de g en $+\infty$ est égale à	
La limite de g en $-\infty$ est égale à	
Le nombre dérivé de g en 0 est égal à	
Le nombre dérivé de g en 2 est égal à	
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$ est égal à	
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est égal à	

III. (3 points)

Soit ABC un triangle quelconque et Δ une droite passant par A, ni perpendiculaire à (AB), ni perpendiculaire à (AC), ni confondue avec (AB), ni confondue avec (AC). On désigne par B' et C' les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur Δ. On note E le projeté orthogonal de B' sur la droite (AC) et F le projeté orthogonal de C' sur la droite (AB). Les droites $(\text{B}'\text{E})$ et $(\text{C}'\text{F})$ se coupent en M.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.

Faire une figure.

1°) Justifier les égalités suivantes : $\overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AB}} \bullet \overrightarrow{\text{AC}'} = \overrightarrow{\text{AB}'} \bullet \overrightarrow{\text{AC}'}$.

2°) Démontrer de même l'égalité : $\overrightarrow{\text{AC}} \bullet \overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AC}'} \bullet \overrightarrow{\text{AB}'}$.

3°) Conclure.

IV. (6 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 1. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;1]$.

On considère les points I, J, K appartenant respectivement aux côtés $[\text{AB}]$, $[\text{BC}]$, $[\text{CA}]$ définis par $\text{AI} = \text{BJ} = \text{CK} = x$.

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

1°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{IJ}} \bullet \overrightarrow{\text{BC}}$ en fonction de x.

2°) Déterminer x tel que les droites (IJ) et (BC) soit perpendiculaires.

Partie B

On prend x quelconque dans l'intervalle $[0\,;1]$.

1°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3\sqrt{3x^2-3x+1}$.

a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=3x^2-3x+1$.

b) Démontrer que, pour tout réel x, on $g(x)\geqslant g\left(\frac{1}{2}\right)$; en déduire que, pour tout réel x, on a $f(x)\geqslant 3\sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)}$.

2°) Calculer IJ^2 en fonction de x. Sans refaire les calculs, donner JK^2 et KI^2.
Quelle est la nature du triangle IJK ?
3°) A l'aide du 1°), déterminer la position de I, J, K tel que le périmètre de IJK soit minimal.
4°) On note O le centre de gravité du triangle ABC. On admettra que O est aussi le centre de gravité du triangle IJK. On note $\mathcal{P}$ le périmètre du triangle IJK.

a) Démontrer que $\mathcal{P}=3\sqrt{3}\,\text{OI}$. On pourra considérer le triangle OIJ.
b) Retrouver ainsi le résultat du 3°).

Corrigé du contrôle commun du 8-2-2007

I.

1°)

N.B. Lorsque le domaine de définition est donné dans l'énoncé, il n'y a pas lieu de le chercher.

f est une fonction rationnelle.

(N.B. Il est inutile de transformer l'expression de $f(x)$ pour dire que *f* est rationnelle)

donc *f* est dérivable sur son ensemble de définition.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{2\left[(x+1)^3 - 1\right]}{(x+1)^3} = \frac{2\left(x^3 + 3x^2 + 3x\right)}{(x+1)^3} = \frac{2x\left(x^2 + 3x + 3\right)}{(x+1)^3}$$

2°) *f* est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$; *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1\,;0]$; *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$.

$f(0) = 2$

3°) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0 \end{array}\right\}$ donc d'après la règle de limite d'une somme, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, on trouve $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to -1} (2x+1) = -1$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1} (x+1)^2 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc d'après la règle de limite d'un quotient, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2} = +\infty$.

D'après la règle de limite d'une somme, on obtient $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$.

4°) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (2x+1)\right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{(x+1)^2} = 0$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = 2x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f(x) - (2x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f(x) - (2x+1) > 0$.

Par conséquent, $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de Δ.

5°) On trace les asymptotes (horizontale et oblique) et la tangente horizontale.

6°) L'équation réduite de T s'écrit $y = 4x + 6$.

II.

Pour répondre aux différentes questions de cet exercice, il est conseillé de tracer l'allure de la représentation graphique de *f*.

L'ensemble de définition de g est égal à	$\mathbb{R}$
Le nombre dérivé de f en 0 est égal à	0
La limite de g en $+\infty$ est égale à	$+\infty$
La limite de g en $-\infty$ est égale à	$\dfrac{1}{3}$
Le nombre dérivé de g en 0 est égal à	0
Le nombre dérivé de g en 2 est égal à	$\dfrac{1}{8}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$ est égal à	$[0\,;+\infty[$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 2$ est égal à	$]-\infty\,;2[$

Explications :

f admet un maximum en 0 donc le nombre dérivé de f en 0 est égal à 0.

$g' = -\dfrac{f'}{f^2}$.

$f'(x) \leqslant 0$; on cherche l'intervalle sur lequel f est décroissante.

III.

1°)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF}$ car F est le projeté orthogonal de M sur (AB)

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$ car C' est le projeté orthogonal de F sur (AB)

$= \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'}$ car B' est le projeté orthogonal de B sur (AC') (qui est confondue avec Δ).

2°) On a : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'}$ (on justifie étape par étape comme précédemment).

3°) On a démontré que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{AC'}$.

On a donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ d'où $\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ soit $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux.

IV.

Partie A

1°) On calcule le produit scalaire par décomposition.

$$\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{IB}} + \overrightarrow{\mathrm{BJ}}\right) \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BJ}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -\overrightarrow{\mathrm{BI}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} + x = -1 \times (1-x) \times \frac{1}{2} + x = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x$$

2°) $(\mathrm{IJ}) \perp (\mathrm{BC})$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{IJ}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$

si et seulement si $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x = 0$

si et seulement si $x = \frac{1}{3}$

Partie B

1°) a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 6x - 3$

g est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$. De plus, on a $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

b) Le minimum global de *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à $\frac{1}{2}$; il est obtenu pour $x = \frac{1}{2}$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geqslant \frac{1}{2}$.

Les deux membres de cette inégalité sont positifs ou nuls et la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{g(x)} \geqslant \sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)}$.

On multiplie les deux membres de cette inégalité par 3 qui est strictement positif.

On obtient alors $f(x) \geqslant 3\sqrt{g\left(\frac{1}{2}\right)}$.

2°) On se place dans le triangle BIJ. On applique le théorème de Pythagore généralisé.
On a : $\mathrm{IJ}^2 = (1-x)^2 + x^2 - 2 \times (1-x) \times x$.
En développant, on obtient $\mathrm{IJ}^2 = 3x^2 - 3x + 1$.
On obtiendrait de même $\mathrm{JK}^2 = \mathrm{KI}^2 = 3x^2 - 3x + 1$.
On en déduit que le triangle IJK est équilatéral.

3°)

$$\mathcal{P}_{\mathrm{IJK}} = 3\sqrt{3x^2 + 3x - 1} = f(x)$$

Or d'après le 1°), *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ obtenu pour $x = \frac{1}{2}$.

Donc le périmètre de IJK est minimal pour $x = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire lorsque I, J, K sont les milieux des côtés du triangle ABC.

4°) On peut appliquer par exemple le théorème de Pythagore généralisé dans le triangle OIJ (isocèle en O car O est le centre du cercle circonscrit au triangle OIJ).

On a : $\mathrm{IJ}^2 = \mathrm{OI}^2 + \mathrm{OJ}^2 - 2 \times \mathrm{OI} \times \mathrm{OJ} \times \cos\dfrac{2\pi}{3}$.

Sachant que $\mathrm{OI} = \mathrm{OJ}$, on obtient : $\mathrm{IJ}^2 = 3 \times \mathrm{OI}^2$ d'où $\mathrm{IJ} = \mathrm{OI}\sqrt{3}$.

$\mathcal{P}_{\mathrm{IJK}} = 3\sqrt{3} \times \mathrm{OI}$

Donc le périmètre de IJK est minimal lorsque OI est minimal c'est-à-dire lorsque I est le milieu de $[\mathrm{AB}]$.

Liste d'erreurs que j'ai trouvées

Comment parler d'une fonction (problèmes de rédactions et d'expressions en tous genres)

La fonction $2x+1$ est affine donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x)=u+v$ avec $u=2x+1$
et $v=x+3$

$f(x)$ est dérivable

f existe si et seulement si

$f(x)$ admet un minimum

Un problème de rédaction

Une équation de T s'écrit :
$T\ :y=$
Il est inélégant et inutile de répéter « T : » sur la 2^{e} ligne.
En général, on réserve la notation « $T\ :y=$ » (notation qui signifie « T a pour équation $y=\dots$ » aux hypothèses ou aux graphiques.

Une faute de présentation dans les tableaux de variations

Ne pas descendre les barres simples sur la dernière ligne avec les flèches des variations.
On ne descend que les doubles barres des valeurs interdites sur la dernière ligne.

Une faute grave de raisonnement

f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ **donc** *f* est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$???

Ce n'est pas parce qu'une fonction est définie sur un intervalle qu'elle est forcément dérivable sur cet intervalle. Par exemple, la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$; en effet, elle n'est pas dérivable en 0.

I. <u>Trois questions supplémentaires qui n'ont pas été posées dans le contrôle</u>.

7°) Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
Déterminer l'abscisse du point K de $\mathcal{C}$ où T recoupe $\mathcal{C}$.

$T: \ y = 2$

On résout l'équation $f(x) = 0$.

On trouve (il faut développer ce qui donne d'assez gros calculs) $2x^3 + 3x^2 = 0$ ce qui est équivalent à $x^2(2x+3) = 0$.

Donc T recoupe $\mathcal{C}$ au point $\text{K}\left(-\dfrac{3}{2}\,;2\right)$.

8°) Déterminer le (ou les) point(s) de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur $\dfrac{7}{4}$.

On résout l'équation $f'(x) = \dfrac{7}{4}$; or $f'(x) = 2 - \dfrac{2}{(x+1)^3}$. Donc l'équation s'écrit : $2 - \dfrac{2}{(x+1)^3} = \dfrac{7}{4}$.

Cette équation est équivalente à $(x+1)^3 = 8$. Donc $x+1 = 2$ ce qui donne $x = 1$.

$\mathcal{C}$ admet une tangente de coefficient directeur $\dfrac{7}{4}$ au point d'abscisse 1.

10°) Quel est le minimum de f sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$? Retrouver ce résultat géométriquement.

$f(x) - 2 = \dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$.

III. Question supplémentaire difficile qui n'a pas été posée dans le contrôle

On suppose que ABC est rectangle en A et que Δ est la médiane issue de A.
Démontrer dans ce cas que M est le pied de la hauteur issue de A.

Partie B

Cette partie est consacrée à l'étude de **deux cas particuliers**.
On se propose de retrouver **géométriquement** le résultat de la **partie A** dans deux ces deux cas.
On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1°) On suppose dans cette question que Δ est la perpendiculaire à la droite (BC) passant par A.

Que peut-on dire de M dans ce cas ?

2°) On suppose dans cette question que ABC est rectangle en A et que Δ est la parallèle à la droite (BC).

Démontrer, en utilisant la translation de vecteur $\overrightarrow{HA}$, que M est le symétrique de H par rapport à A.
En déduire que $(AM) \perp (BC)$.