TS spé — Suites arithmético-géométriques

① Définition

On dit qu'une suite (u_n) est **arithmético-géométrique** s'il existe deux réels *a* et *b* tels que
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = au_n + b$.

② Cas particuliers

- Si $a = 1$, la suite (u_n) est arithmétique de raison *b*.

- Si $b = 0$, la suite (u_n) est géométrique de raison *a*.

- Si $a = 0$, la suite (u_n) est constante à partir de l'indice 1.

③ Expression du terme général

On cherche l'expression du terme général de (u_n).

On suppose que $a \neq 1$.

L'équation $\ell = a\ell + b$ admet une unique solution : $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

L'égalité $u_{n+1} = au_n + b$ est équivalente à $u_{n+1} - \ell = au_n + b - (a\ell + b)$ (par soustraction membre à membre).
Donc $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$.

On en déduit que la suite $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison *a*.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - \ell = a^n (u_0 - \ell)$.

D'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^n (u_0 - \ell) + \ell}$.

L'idée fondamentale à retenir est celle de l'introduction de la détermination du réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$ et de la suite auxiliaire $(u_n - \ell)$.

④ Exemples

• Exemple 1

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de *n*.

On cherche ℓ tel que $\ell = 2\ell + 3$ donc $\ell = -3$ (il s'agit de la limite éventuelle de la suite (u_n)).

On considère la suite $(u_n + 3)$.

La suite $(u_n + 3)$ est géométrique de raison 2.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + 3 = 2^n (u_0 + 3)$ soit $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n + 3 = 2^n \times 7$.

On en conclut que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 7 \times 2^n - 3$.

• Exemple 2

$$(u_n)\ \begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de *n*.

On cherche ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2}\ell + 2 \quad (1)$.

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow \ell &= \frac{2}{\frac{1}{2}} \\ \Leftrightarrow \ell &= 4 \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$.

On peut aussi écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 4 - \frac{6}{2^n}$.

⑤ Vocabulaire

Lorsque $a \neq 1$, le réel ℓ tel que $\ell = a\ell + b$ est appelé « point fixe » de la suite.
Cela correspond à l'état stable.
De manière générale, lorsque (u_n) est une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, on appelle point fixe un réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.

⑥ Une autre voie

On revient aux notations générales.

On peut calculer les premiers termes de la suite.

$u_1 = au_0 + b$

$$\begin{aligned} u_2 &= a\left(au_0 + b\right) + b \\ &= a^2 u_0 + ab + b \end{aligned}$$

$u_3 = a^3 u_0 + a^2 b + ab + b$

Il est assez facile de conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^n u_0 + a^{n-1} b + ... + ab + b$.
En factorisant, on peut même écrire $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a^n u_0 + b\left(a^{n-1} + ... + a + 1\right)$.

La somme $a^{n-1} + ... + a + 1$ peut alors être réduite en distinguant les cas $a = 1$ et $a \neq 1$.

Lorsque $a \neq 1$, on retrouve une expression générale de la forme de celle donnée dans le paragraphe ③.

On évite en général cette méthode pour privilégier exclusivement la méthode la suite auxiliaire.