TS spé — Processus de Markov

I. Distribution de probabilité sur un ensemble fini

Dans ce paragraphe, il s'agit essentiellement de rappels des années antérieures.

1°) Définition

On définit une **distribution de probabilité** (ou **mesure de probabilité**) sur l'ensemble Ω des résultats e_1, e_2, …, e_n d'une expérience aléatoire en leur attribuant des nombres fixes p_1, p_2, …, p_n vérifiant les deux conditions suivantes :
C_1 : pour tout entier naturel $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $p_i \geqslant 0$;
C_2 : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Les réels p_1, p_2, …, p_n sont tous positifs ou nuls et leur somme est égale à 1.
On peut noter que les conditions C_1 et C_2 impliquent que $\forall i \in \{1, 2, ..., n\} \quad 0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

On rappelle que l'ensemble $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ s'appelle l'univers des possibles.

2°) Tableau

Résultats	e_1	e_2	…	e_n	
Probabilités	p_1	p_2	…	p_n	Total $= 1$

3°) Notation

On note P la loi de probabilité.
On écrira $P(e_1) = p_1$ (probabilité du résultat e_1), $P(e_2) = p_2$ (probabilité du résultat e_2)...
On dira que l'expérience aléatoire est **modélisée** par la loi de probabilité P.

En convenant de prendre les résultats possibles dans l'ordre e_1, e_2, …, e_n, cette loi de probabilité sur l'ensemble Ω peut être représentée sous la forme :
d'un n-uplet : $(p_1, p_2, ..., p_n)$
ou
d'une matrice uniligne $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & ... & p_n \end{pmatrix}$ (vecteur ligne).

C'est cette dernière notation qui sera privilégiée dans ce chapitre.
On parle de **distribution de probabilité** sur Ω.

4°) Interprétation

p_i est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que le résultat e_i a de se réaliser.

4°) Cas d'équiprobabilité – loi (distribution) uniforme

Résultats	e_1	e_2	…	e_n	
Probabilités	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	**Total** $= 1$

ou

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & ... & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

II. Exemple de processus de Markov

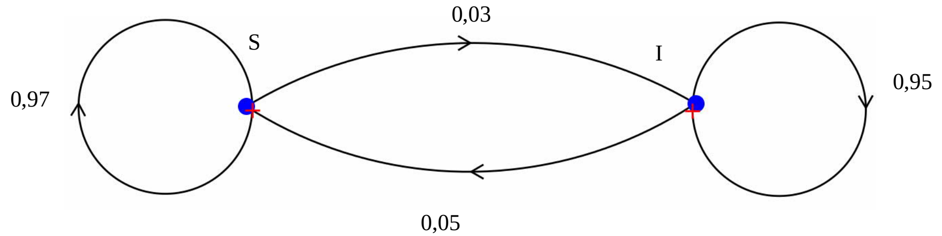
On reprend le modèle « SI » d'épidémie étudié dans le chapitre sur les simulations.

1°) Situation

On considère une maladie contagieuse.
On constate que chaque mois, dans la population d'une ville, une personne saine peut tomber malade avec une probabilité de 0,03 et une personne malade peut guérir avec une probabilité de 0,05.
On suppose que, initialement, la population n'est pas touchée par la maladie et on s'intéresse à un individu quelconque choisi au départ.

2°) Représentation à l'aide d'un graphe probabiliste (ou pondéré)

On considère les *états* suivants
S : « L'individu est susceptible d'être contaminé par la maladie »
I : « L'individu est infecté par la maladie ».



E_1 et E_2 sont appelés les **sommets** du graphe.
Ces sommets sont reliés par des **arêtes orientées** (on parle de « graphe orienté » ou de « graphe fléché »).

On observera la présence de **boucles** au niveau des sommets.

Il s'agit d'un graphe pondéré. Les arêtes portent des pondérations égales aux probabilités conditionnelles précisées dans l'énoncé. Il s'agit des probabilités de transition d'un état à l'autre. Elles sont constantes au cours du temps.

On peut assimiler le processus évolutif à une *marche aléatoire* sur le graphe à deux sommets représenté précédemment.

À chaque étape, les probabilités sont les mêmes.

Le comportement de l'individu est appelé une *marche aléatoire* (on peut faire l'analogie avec un piéton qui marcherait sur une ligne droite en allant, aléatoirement, soit à gauche, soit à droite).
Cette marche aléatoire comporte deux *états* E_1 et E_2.

Matrice de transition en lignes :

$$\mathrm{A} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{I} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{S} & \quad\mathrm{I} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette matrice donne les probabilités de passage d'un état à l'autre entre 2 étapes, c'est-à-dire d'un mois au suivant.

Les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls et la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1. On dit que A est stochastique en lignes.

Distribution de probabilité à l'étape *n* :

probabilité d'être dans l'état S au bout de *n* étapes ↓ probabilité d'être dans l'état I au bout de *n* étapes ↓

Pour tout entier naturel *n*, on pose $\pi_n = (\dots\dots \quad \dots\dots)$

Il s'agit d'une matrice uniligne (matrice ligne 1 × 2).
Les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls et leur somme est égale à 1. On dit que A est stochastique en lignes.

La notation conventionnelle en probabilité n'a aucun rapport avec le nombre π.

Relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{A}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \pi_0 \mathrm{A}^n$.

Exemples :

On suppose que matrice $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ [distribution initiale].

$\pi_1 = \pi_0 \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \end{pmatrix}$ [distribution de probabilité au bout d'1 étape, c.-à-d. d'1 mois]

$\pi_2 = \pi_1 \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9424 & 0,0576 \end{pmatrix}$ [distribution de probabilité au bout de 2 étapes, c.-à-d. de 2 mois]

On vérifie à chaque fois que la somme des probabilités est égale à 1.

Complément :

Soit *a* et *b* deux réels de somme non nulle.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{a+b} \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^n}{a+b} \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

Il est possible d'exprimer π_n en fonction de *n* et d'en déduire la distribution limite π_∞.

III. Généralisation

1°) Notations et vocabulaire

L'exemple du **II** se généralise à d'autres situations de processus où l'on a un nombre fini d'états p (pour nous, cette année, souvent 2 ou 3). On a des probabilités de passage constantes d'un état à l'autre quelle que soit l'étape où l'on est.

On représente alors la situation par un graphe probabiliste et on lui associe une matrice de transition en ligne A carrée d'ordre p en ayant choisi un ordre pour les états. Les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls et leur somme est égale à 1. On dit que A est stochastique en lignes.

La situation s'apparente alors à une marche aléatoire sur ce graphe.

Pour tout entier naturel n, on note π_n la distribution de probabilité l'étape n. Il s'agit d'une matrice ligne à p colonnes (matrice uniligne).

La suite (π_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \pi_n \mathrm{A}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_{n+1} = \pi_0 \mathrm{A}^n$.

La matrice π_0 est appelée distribution initiale.

Lorsque la suite (π_n) converge, on dit que le processus converge et la distribution limite π_∞ vérifie l'égalité $\pi_\infty = \pi_\infty \mathrm{A}$.
On dit que π_∞ une distribution invariante conformément à la définition.

2°) Définition [distribution de probabilité invariante]

Soit μ une distribution de probabilité écrite sous la forme d'une matrice ligne à p colonnes (matrice uniligne).
On dit que m est une distribution invariante pour exprimer que $\mu = \mu \mathrm{A}$.

3°) Propriété [puissances de la matrice de transition]

Pour tout entier naturel k, les coefficients de la matrice A^k donnent les probabilités de passage (probabilités de transition) d'un état à l'autre en k étapes.

IV. Rappel : puissance d'une matrice carrée d'ordre 2 dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1

Propriété :

Soit a et b deux réels de somme non nulle.
On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

On utilisera ce résultat dans l'étude de processus à 2 états.

L'étude des processus de Markov est une partie importante des probabilités qui comporte des applications dans de nombreux domaines.
Il ne s'agit ici que d'une petite initiation.

Il est possible d'exprimer π_n en fonction de n et d'en déduire la distribution limite π_∞.

Exercices sur les processus de Markov

2 états

On rappelle le résultat suivant :

> Soit a et b deux réels de somme non nulle.
> On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

1 Un compte bancaire peut être créditeur (il est alors « dans le vert ») ou débiteur (il est alors « dans le rouge »).
L'évolution mensuelle du compte bancaire d'un certain client est telle que :
- lorsque le compte est « dans le vert » à la fin du mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,4 ;
- lorsque le compte est « dans le rouge » à la fin du mois, la probabilité qu'il le soit encore à la fin du mois suivant est 0,35.

1°) On définit les états V : « Le compte est dans le vert » et R : « Le compte est dans le rouge ».
Représenter le graphe probabiliste traduisant la situation.
b) Donner la matrice de transition en lignes A en prenant les états dans l'ordre R-V.
2°) Pour tout entier naturel n, on note π_n la distribution de probabilité au bout de n mois.
On suppose qu'à l'instant initial le compte est bien sûr « dans le vert ». On a donc $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer « à la main » π_1, π_2, π_3.
Quelle est la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 2e mois ? du 3e mois ?
À l'aide de la calculatrice, conjecturer l'existence d'une distribution limite.
3°) Déterminer A^n pour tout entier naturel n. Vérifier le résultat avec le site « dcode » (partie « puissances de matrices »).
Exprimer π_n en fonction de n.
En déduire la distribution limite π_∞.

2 Chaque matin, l'allumeur de réverbère du Petit Prince change l'état de sa planète avec une probabilité de 0,75.
On considère le processus aléatoire comportant les deux états suivants :
état 1 : « Le réverbère est allumé » ;
état 2 : « Le réverbère est éteint ».
1°) Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste puis écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe.
2°) Déterminer A^n pour tout entier naturel n.
Vérifier le résultat avec le site « dcode » (partie « puissances de matrices »).
3°) Au jour 0, le réverbère est allumé.
Déterminer la distribution de probabilités π_n au matin du jour n puis la distribution de probabilités limite.
Reprendre la question en supposant qu'au jour 0, le réverbère est éteint.

3 On souhaite étudier une population d'oiseaux migrateurs. Une étude menée en janvier 2020 a montré qu'un quart de la population séjournait dans la région nord. Le taux de migration vers le nord est égal à 20 % et le taux de migration vers la région sud est égal à 10 %.
1°) Représenter la situation par un graphe pondéré en définissant deux états.
Écrire la matrice de transition A en colonnes.
2°) On note π_n la distribution de la population d'oiseaux au bout de *n* mois (on commence en janvier 2020).
Exprimer A^n en fonction de *n* à l'aide du rappel ci-dessous puis π_n en fonction de *n*.
En déduire la distribution limite.

4 On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient une boule noire et deux boules blanches ; l'urne U_2 contient deux boules noires et une boule blanche.
On effectue une suite de tirages avec remise de la façon suivante :

> Le premier tirage se fait dans l'urne U_1.
>
> Lors du *n*-ième tirage (*n* désignant un entier naturel non nul) :
> - si la boule tirée est noire, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 ;
> - si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

À chaque étape, on tire une boule que l'on remet dans la même urne.
On notera que le contenu des urnes n'évolue pas.
À chaque étape, on est dans l'un des états suivants :
« Le tirage s'effectue dans l'urne l'urne U_1 » (état 1) ; « Le tirage s'effectue dans l'urne U_2 » (état 2).
1°) Représenter le graphe probabiliste associé à la situation.
2°) Déterminer la distribution de probabilités π_n après le *n*-ième tirage et la distribution limite.

4 états

5 Un individu vit dans un lieu où il est susceptible d'attraper une maladie par une piqûre d'insecte. Il peut être dans l'un des trois cas suivants : immunisé (I), malade (M) ou non malade et non immunisé (S). D'un mois à l'autre, son état peut changer selon les règles suivantes :
- étant immunisé, il peut le rester avec une probabilité de 0,9 ou passer à l'état S avec une probabilité de 0,1 ;
- étant dans l'état S, il peut le rester avec une probabilité de 0,5 ou passer à l'état M avec une probabilité de 0,5 ;
- étant malade, il peut le rester avec une probabilité de 0,2 ou passer à l'état I avec une probabilité de 0,8.

1°) a) Représenter la situation par un graphe probabiliste.
b) Écrire la matrice de transition A en colonnes en notant respectivement 1, 2, 3 les états I, M, S et en les prenant dans cet ordre.
2°) On suppose qu'au départ un individu est immunisé.
Pour tout entier naturel *n*, on note π_n la distribution de probabilité au bout de *n* mois.
Déterminer la distribution de probabilité au bout de 2 mois.
En déduire la probabilité que l'individu :
- soit malade au bout de 2 mois ;
- soit immunisé au bout de 2 mois.

6 Une urne A contient 2 boules blanches et une urne B contient 4 boules noires.
On procède au tirage aléatoire simultané d'une boule de chaque urne et la boule extraite est changée d'urne.
On répète cette opération.
On s'intéresse au contenu de l'urne A à chaque étape.
Il y a trois états possibles :
« L'urne A contient 2 boules blanches » (état 1),
« L'urne A contient 1 boule blanche et 1 boule noire » (état 2),
« L'urne A contient 2 boules noires » (état 3).
On notera que le nombre de boules est constant dans chaque urne.
Le contenu de l'urne B se déduisant à chaque fois de celui l'urne A, il n'est pas utile de le préciser pour définir les états.
1°) Déterminer les probabilités de transition (certaines nécessitent un calcul) puis faire un graphe probabiliste.
Écrire la matrice de transition M en colonnes.
2°) À l'aide du site dcode, déterminer la distribution de probabilités π_n au bout de *n* étapes puis la distribution limite.

7 Je propose deux versions de cet exercice.

Version 1 :
Une fourmi se déplace sur les « bords » d'un triangle ABC et change de sommet à chaque seconde. On se propose d'étudier la position de la fourmi au bout de *n* secondes.
On suppose qu'elle part du point A.
- Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition T en colonnes associée.
- Déterminer la probabilité que la fourmi soit en C au bout de 5 secondes.
- À l'aide du site « dcode », déterminer la distribution de probabilités après *n* secondes et la distribution limite.

Version 2 :
1°) On pose $M=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $U=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $V=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$.
Vérifier que $M=2U-V$.
Calculer U^2, V^2, UV et VU.
En déduire M^n pour *n* entier naturel quelconque.
2°) Une fourmi se déplace sur les « bords » d'un triangle ABC et change de sommet à chaque seconde. On se propose d'étudier la position de la fourmi au bout de *n* secondes.
On suppose qu'elle part du point A.
- Représenter la situation par un graphe probabiliste et donner la matrice de transition T en colonnes associée.
- Déterminer la probabilité que la fourmi soit en C au bout de 5 secondes.
- À l'aide de la question 1°), déterminer la distribution de probabilités π_n après *n* secondes et la distribution limite.

$\boxed{8}$ Les urnes d'Ehrenfest à 2 boules

On considère deux urnes A et B. On dispose également d'une pièce de monnaie équilibrée.
Au départ,
- l'urne A contient deux boules indiscernables au toucher, numérotées 1 et 2 ;
- l'urne B est vide.

On effectue des lancers successifs indépendants de la pièce en notant à chaque fois le côté qu'elle présente.
Si elle présente le côté pile (P), on change d'urne la boule numéro 1.
Si elle présente le côté face (F), on change d'urne la boule numéro 2.
On s'intéresse à l'évolution du nombre de boules dans A.
On s'intéresse à l'évolution du nombre de boules de chaque urne.
À chaque étape, on est dans l'un des états E_0, E_1, E_2 suivants :

- E_0 : « L'urne A contient 2 boules et l'urne B contient 0 boule » ;
- E_1 : « L'urne A contient 1 boule et l'urne B contient 1 boule » ;
- E_2 : « L'urne A contient 0 boule et l'urne B contient 2 boules ».

1°) Représenter le graphe probabiliste associé à la situation en utilisant les états E_0, E_1, E_2.
On réfléchira aux probabilités de passage d'un état à un autre (probabilités de transition).
2°) Écrire la matrice de transition M en colonnes associée à ce graphe en prenant les états dans l'ordre E_0, E_1, E_2.
3°) Calculer M^2 et M^3 ; en déduire M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque (suivant les valeurs de *n*).
4°) Pour tout entier naturel *n*, on note π_n la distribution de probabilité au bout de *n* étapes. On a ainsi $\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer π_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque (suivant les valeurs de *n*).
5°) Démontrer qu'il existe une unique distribution de probabilité invariante μ que l'on déterminera.

$\boxed{9}$ Trois enfants Alice, Bernard et Charles se font des passes avec un ballon de football. Alice passe toujours le ballon à Bernard, Bernard à Charles et Charles passe le ballon 1 fois sur 3 à Bernard.
À chaque étape, les enfants font des passes (ils ne gardent pas le ballon).
1°) Représenter la situation précédente à l'aide d'un graphe probabiliste et écrire la matrice de transition en colonnes M.
2°) On admet que la suite $\left(M^n\right)$ de matrices converge. Conjecturer sa limite à l'aide de la calculatrice.
3°) Interpréter concrètement le résultat précédent.

On pourra utiliser un logiciel de calcul formel (par exemple, le logiciel en ligne dcode).

Le vendredi 10 mai 2024

Progression exercices

Processus de Markov à 2 états :

$\boxed{20}$ oiseaux migrateurs $\boxed{23}$ On dispose de 2 urnes

Processus de Markov à 3 états :

$\boxed{3}$ modèle épidémie SIR $\boxed{18}$ 3 enfants avec un ballon $\boxed{22}$ $\boxed{4}$ Ehrenfest à 2 boules

Processus de Markov à 4 états ou plus :

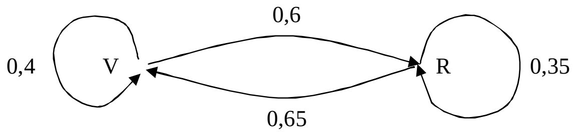
$\boxed{1}$ carré $\boxed{2}$ tétraèdre $\boxed{6}$ pion sur des cases $\boxed{24}$ tétraèdre

Solutions

$\boxed{1}$

1°)

a) On note V l'état « Le compte est dans le vert » et R l'état « Le compte est dans le rouge ».



b) La matrice de transition en lignes du graphe en prenant les sommets dans l'ordre V-R est :

$$A = \begin{array}{c} \\ V \\ R \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} V & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,65 & 0,35 \end{pmatrix} \end{array}$$

2°)

$\pi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1 : vert ; 0 : rouge)

$$\pi_1 = \pi_0 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,65 & 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \pi_1 A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,65 & 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$$

Pour effectuer, le calcul « à la main », on procède ainsi :

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,65 & 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4\times 0,4 + 0,6\times 0,65 & 0,4\times 0,6 + 0,6 \times 0,35 \end{pmatrix}.$$

$$\pi_3 = \pi_2 A = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,65 & 0,35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5125 & 0,4875 \end{pmatrix}$$

Quelle est la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 2^e mois ? du 3^e mois ?

$\pi_2 = \begin{pmatrix} 0,55 & 0,45 \end{pmatrix}$ donc la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 2^e mois est égale à 0,55.

$\pi_3 = \begin{pmatrix} 0,5125 & 0,4875 \end{pmatrix}$ donc la probabilité que le compte du client soit « dans le vert » à la fin du 3^e mois est égale à 0,5125.

3°)

> Soit a et b deux réels de somme non nulle.
>
> On a $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}^n = \dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + \dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

Déterminons A^n pour n entier naturel quelconque.

On applique la formule du cadre.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \begin{pmatrix} 1-0,6 & 0,6 \\ 0,65 & 1-0,65 \end{pmatrix}^n$$

$$= \frac{1}{0,6+0,65}\begin{pmatrix} 0,65 & 0,6 \\ 0,65 & 0,6 \end{pmatrix} + \frac{(1-0,6-0,65)^n}{0,6+0,65}\begin{pmatrix} 0,6 & -0,6 \\ -0,65 & 0,65 \end{pmatrix}$$

$$= 0,8\begin{pmatrix} 0,65 & 0,6 \\ 0,65 & 0,6 \end{pmatrix} + \frac{(-0,25)^n}{1,25}\begin{pmatrix} 0,6 & -0,6 \\ -0,65 & 0,65 \end{pmatrix}$$

$$= 0,8\begin{pmatrix} 0,65 & 0,6 \\ 0,65 & 0,6 \end{pmatrix} + (-0,25)^n \times 0,48\begin{pmatrix} 0,6 & -0,6 \\ -0,65 & 0,65 \end{pmatrix}$$

On peut éventuellement écrire A^n sous la forme d'une seule matrice.

$$= \begin{pmatrix} 0,52 + (-0,25)^n \times 0,48 & 0,48\left(1+(-0,25)^n\right) \\ 0,52\left(1+(-0,25)^n\right) & 0,48+(-0,25)^n\times 0,52 \end{pmatrix}$$

Exprimons π_n en fonction de n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi_n = \pi_0 A^n$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,52 + (-0,25)^n \times 0,48 & 0,48\left(1+(-0,25)^n\right) \\ 0,52\left(1+(-0,25)^n\right) & 0,48+(-0,25)^n\times 0,52 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,52 + (-0,25)^n \times 0,48 & 0,48\left(1+(-0,25)^n\right) \end{pmatrix}$$

En déduire la distribution limite π_∞.

$-1 < -0,25 < 1$ donc $(-0,25)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On en déduit que $\pi_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi_\infty = \begin{pmatrix} 0,52 & 0,48 \end{pmatrix}$ (distribution limite).

Cette distribution n'est pas uniforme. Les probabilités ne s'équilibrent pas.

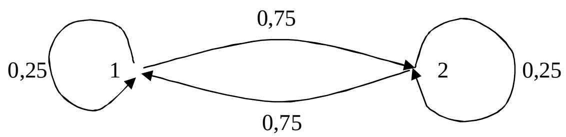
On peut vérifier que cette distribution est stable, c'est-à-dire $\pi_\infty A = \pi_\infty$.

$\boxed{2}$ **L'allumeur de réverbères et le Petit Prince**

État 1 : « Le réverbère est allumé »

État 2 : « Le réverbère est éteint ».

1°)



La situation se modélise par une marche aléatoire sur ce graphe probabiliste à deux états.

La matrice de transition en lignes A du graphe est : $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\\0,75 & 0,25\end{pmatrix}$.

Cette matrice est symétrique.

$\pi_0=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ (1 : vert ; 0 : rouge)

$$\pi_1=\pi_0\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\\0,75 & 0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix}$$

$$\pi_2=\pi_1\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\\0,75 & 0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,625 & 0,375\end{pmatrix}$$

$$\pi_3=\pi_2\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0,625 & 0,375\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,25 & 0,75\\0,75 & 0,25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,4375 & 0,5625\end{pmatrix}$$

3°) On applique la formule $\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{pmatrix}1-a & b\\a & 1-b\end{pmatrix}^n=\dfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & b\\a & a\end{pmatrix}+\dfrac{(1-a-b)^n}{a+b}\begin{pmatrix}a & -b\\-a & b\end{pmatrix}$ avec $a=b=0,75$.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=\frac{1}{1,5}\begin{pmatrix}0,75 & 0,75\\0,75 & 0,75\end{pmatrix}+\frac{(1-1,5)^n}{1,5}\begin{pmatrix}0,75 & -0,75\\-0,75 & 0,75\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5\\0,5 & 0,5\end{pmatrix}+(-0,5)^n\begin{pmatrix}0,5 & -0,5\\-0,5 & 0,5\end{pmatrix}$$

Il est intéressant de mettre 0,5 en facteur.

On peut éventuellement écrire A^n sous la forme d'une seule matrice.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \mathrm{A}^n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

3°)

Exprimons π_n en fonction de n.

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \pi_n=\pi_0\mathrm{A}^n$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\times\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\\1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}$$

En déduire la distribution limite π_∞.

$-1<-\dfrac{1}{2}<1$ donc $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

On en déduit que $\pi_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pi_\infty=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ (distribution limite).

Cette distribution est uniforme : les probabilités s'équilibrent.

On peut vérifier que cette distribution est stable, c'est-à-dire $\pi_\infty\mathrm{A}=\pi_\infty$.

À très long terme, il y a autant de chances que le réverbère soit allumé ou éteint.

Remarque : Les calculs sont identiques avec la distribution initiale $\pi'_0=\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$.