**TS**

# Exercices sur les variables aléatoires discrètes

**1** **Points d'honneur au bridge**
On dispose d'un jeu de 52 cartes.
On attribue :
• 4 points à un as
• 3 points à un roi
• 2 points à une dame
• 1 point à un valet
• 0 point à une autre carte.
On tire une carte au hasard.
On note $X$ le nombre de points de cette carte.
1°) Déterminer la loi de probabilité de $X$ (en tableau).
2°) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

**2** Une urne contient 4 boules blanches, 3 boules noires et 1 boule jaune.
On tire simultanément trois boules au hasard.
On note $X$ le nombre de couleurs présentes parmi les trois boules.
1°) Quelles sont les valeurs prises par $X$ ?
2°) Calculer $P\left(X=1\right)$ et $P\left(X=3\right)$ ; en déduire $P\left(X=2\right)$.
3°) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

**3** On tire trois boules simultanément au hasard d'une urne contenant 6 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules vertes. On note $X$ le nombre de boules blanches obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de $X$ (donner les probabilités en fractions irréductibles).

**4** Une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5.
On tire deux boules simultanément. On note $X$ le plus grand des deux numéros obtenus.
1°) Déterminer la loi de probabilité de $X$.
2°) Calculer $P(X \geqslant 3)$ et $P(X \leqslant 3)$.

**5** On lance deux dés non truqués. On gagne 350 € si le double-six apparaît ; on perd 10 € sinon.
On note $X$ le gain réalisé en euros.
1°) Déterminer la loi de probabilité de $X$.
2°) Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

**6** Un travail à effectuer nécessite la réalisation de deux tâches successives A et B.
La tâche A a une durée aléatoire (en jours) $X$ dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

| **Valeurs de $X$** | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

La tâche B a une durée aléatoire (en jours) $Y$ dont la loi de probabilité est donnée dans le tableau suivant.

| **Valeurs de $Y$** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

Les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes.

Calculer la probabilité de l'événement E : « la durée du travail est inférieure ou égale à trois jours ».

# Corrigé

## $\boxed{1}$ Points d'honneur au bridge

1°) Attention à la rédaction. Il faut absolument signaler l'équiprobabilité. Voir cours.

On détermine l'ensemble des valeurs que peut prendre *X*.

*X* peut prendre les valeurs :
$x_1 = 4$ (on obtient 4 points lorsque la carte tirée est un as)
$x_2 = 3$ (on obtient 3 points lorsque la carte tirée est un roi)
$x_3 = 2$ (on obtient 2 points lorsque la carte tire est une dame)
$x_4 = 1$ (on obtient 1 point lorsque la carte tirée est un valet)
$x_5 = 0$ (on obtient 0 point dans le cas la carte tirée est une carte qui n'est ni un as, ni un roi, ni une dame, ni un valet).

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

On pose les calculs :

$$P(X = x_1) = P(X = 4) = P(\text{« obtenir un as »}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(X = x_2) = P(X = 3) = P(\text{« obtenir un roi »}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(X = x_3) = P(X = 2) = P(\text{« obtenir une dame »}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(X = x_4) = P(X = 1) = P(\text{« obtenir un valet »}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$P(X = x_5) = P(X = 0) = P(\text{« obtenir une carte qui n'est ni roi, ni valet, ni as, ni dame »}) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

On remplit un tableau de valeurs :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$* | $\frac{9}{13}$ | $\frac{1}{13}$ | $\frac{1}{13}$ | $\frac{1}{13}$ | $\frac{1}{13}$ | 1 |

* **Attention**, dans le tableau écrire $P(X = x_i)$ (ne pas raccourcir en $P(x_i)$).

2°) **Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$**

**• Calcul de l'espérance :**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=5} x_i \times P(X = x_i)$$
$$= 4 \times \frac{1}{13} + 3 \times \frac{1}{13} + 2 \times \frac{1}{13} + 1 \times \frac{1}{13}$$
$$= \frac{1}{13} \times (4 + 3 + 2 + 1)$$
$$= \frac{10}{13}$$

**• Calcul de la variance :**

**2 méthodes :**

**- avec la définition**

**- avec la méthode de König-Huygens**

- avec la définition

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=5} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times P(X = x_i)$$
$$= \left(0 - \frac{10}{13}\right)^2 \times \frac{9}{13} + \left(1 - \frac{10}{13}\right)^2 \times \frac{1}{13} + \left(2 - \frac{10}{13}\right)^2 \times \frac{1}{13} + \left(3 - \frac{10}{13}\right)^2 \times \frac{1}{13} + \left(4 - \frac{10}{13}\right)^2 \times \frac{1}{13}$$
$$= \frac{1}{13}\left[\left(-\frac{10}{13}\right)^2 \times 9 + \left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{16}{13}\right)^2 + \left(\frac{29}{13}\right)^2 + \left(\frac{42}{13}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{13} \times \frac{900 + 9 + 256 + 841 + 1764}{169}$$
$$= \frac{3770}{13 \times 169}$$
$$= \frac{\cancel{13} \times 290}{\cancel{13} \times 169}$$
$$= \frac{290}{169}$$

- avec la méthode de König-Huygens

$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{5} (x_i)^2 \times P(X = x_i)\right) - \left[E(X)\right]^2$$
$$= 0^2 \times \frac{9}{13} + 1^2 \times \frac{1}{13} + 2^2 \times \frac{1}{13} + 3^2 \times \frac{1}{13} + 4^2 \times \frac{1}{13} - \left(\frac{10}{13}\right)^2$$
$$= \frac{290}{169}$$

**Calcul de l'écart-type :**

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ (définition de l'écart-type d'une variable aléatoire)

$=\sqrt{\dfrac{290}{169}}$

$=\dfrac{\sqrt{290}}{13}$

$\boxed{2}$ urne $\begin{cases}4 \text{ boules blanches}\\ 3 \text{ boules noires}\\ 1 \text{ boule jaune}\end{cases}$

On tire simultanément 3 boules au hasard.

$X$ : nombre de couleurs présentes parmi les trois boules

1°) **Valeurs prises par *X***

Les valeurs possibles de $X$ sont $x_1=1$, $x_2=2$ et $x_3=3$ puisque l'on peut obtenir soit un tirage unicolore, soit un tirage bicolore, soit un tirage tricolore.

**Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.**

2°) **Calcul de *P*(*X* = 1), *P*(*X* = 3), *P*(*X* = 2)**

Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal au nombre de combinaisons de 3 éléments pris parmi 8 c'est-à-dire $\dbinom{8}{3}=\dfrac{8!}{3!\times(8-3)!}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2}=56$.

On utilise les combinaisons (pour les calculs, on se sert de la calculatrice).
On obtient les résultats suivants :

$P(X=1)=P($« obtenir trois boules de la même couleur »$)$

$=\dfrac{\dbinom{4}{3}+\dbinom{3}{3}}{\dbinom{8}{3}}$

$=\dfrac{4+1}{56}$

$=\dfrac{5}{56}$

(un tirage unicolore est constitué de trois boules blanches ou de trois boules noires)

$P(X=3)=P($« obtenir trois boules de couleurs différentes »$)$

$=\dfrac{\dbinom{3}{1}\times\dbinom{4}{1}\times\dbinom{1}{1}}{\dbinom{8}{3}}$

$=\dfrac{12}{56}$

$=\dfrac{3}{14}$

(un tirage tricolore est constitué d'une boule blanche, d'une boule noire et d'une boule jaune)

On en déduit alors $P(X=2)$.

D'après le cours, on sait que $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$ (la somme des probabilités est égale à 1).
Donc

$P(X=2)=1-\left[P(X=1)+P(X=3)\right]$

$=1-\left(\dfrac{5}{56}+\dfrac{12}{56}\right)$

$=1-\dfrac{17}{56}$

$=\dfrac{39}{56}$

La loi de probabilité de $X$ est donnée dans le tableau ci-dessous.

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | Total |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\dfrac{5}{56}$ | $\dfrac{39}{56}$ | $\dfrac{12}{56}$ | 1 |

3°) **Calcul de $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$**

**• Calcul de l'espérance de $X$ :**

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{i=3} x_i \times P(X = x_i) \\
&= 1\times\frac{5}{56} + 2\times\frac{39}{56} + 3\times\frac{12}{56} \\
&= \frac{5+36+78}{56} \\
&= \frac{119}{56} \\
&= \frac{17}{8} \quad \text{(on a simplifié par 7)}
\end{aligned}$$

**• Calcul de la variance de $X$ :**

- avec la définition

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{i=3} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times P(X = x_i) \\
&= \left(1-\frac{17}{8}\right)^2 \times \frac{5}{56} + \left(2-\frac{17}{8}\right)^2 \times \frac{39}{56} + \left(3-\frac{17}{8}\right)^2 \times \frac{12}{56} \\
&= \frac{81}{64}\times\frac{5}{56} + \frac{1}{64}\times\frac{39}{56} + \frac{49}{64}\times\frac{12}{56} \\
&= \frac{405}{3584} + \frac{39}{3584} + \frac{588}{3584} \\
&= \frac{1032}{3584} \\
&= \frac{129}{448}
\end{aligned}$$

- formule de König-Huygens

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{i=3} (x_i)^2 \times P(X = x_i) - \left[E(X)\right]^2 \\
&= \left(1^2\times\frac{5}{56} + 2^2\times\frac{39}{56} + 3^2\times\frac{12}{56}\right) - \left(\frac{17}{8}\right)^2 \\
&= \frac{129}{448}
\end{aligned}$$

**• Calcul de l'écart-type de $X$ :**

$$\begin{aligned}
\sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\
&= \sqrt{\frac{129}{448}}
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité.

**• Valeurs prises par $X$**

$X$ peut prendre les valeurs $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

**• Calculs de probabilités**

Il faut utiliser les combinaisons.

$$P(X=0) = P(\text{« aucune boule blanche »}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{10}{465} = \frac{2}{33}$$

$$\frac{\binom{5}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{\dfrac{5\times4\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times2}}{\dfrac{11\times10\times9}{3\times2}} = \frac{10}{465} = \frac{2}{33}$$

$$P(X=1) = \frac{\binom{6}{1}\times\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{6\times10}{165} = \frac{4}{11}$$

$$P(X=2) = \frac{\binom{6}{2}\times\binom{5}{1}}{\binom{11}{3}} = \frac{15\times5}{165} = \frac{5}{11}$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{20}{165} = \frac{4}{33}$$

Dans le cas, où on ne tire aucune boule blanche, cela signifie que l'on tire 3 boules parmi les 5 qui ne sont pas blanches.

On obtient le tableau ci-dessous :

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{2}{33}$ | $\frac{4}{11}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{4}{33}$ |

$\boxed{4}$

$X$ : plus grand des deux numéros obtenus

1°) **Déterminons la loi de probabilité de *X*.**

On calcule les probabilités en regardant tous les cas.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.

$X$ peut prendre les valeurs $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$.

On effectue les calculs de probabilités (inutile d'expliquer davantage).

$$P(X = x_1) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(X = x_2) = \frac{\binom{2}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$P(X = x_3) = \frac{\binom{3}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$P(X = x_4) = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ |

2°) **Calculons $P(X \geqslant 3)$ et $P(X \leqslant 3)$.**

$$P(X \geqslant 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{9}{10}$$

$$P(X \leqslant 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

On peut reprendre cet exercice en supposant que l'urne contient $n$ boules. On effectue le même raisonnement.

$\boxed{5}$

$X$ : gain algébrique en euros

**Modélisation :** L'ensemble des résultats possibles est l'ensemble des couples $(a, b)$ où $a$ et $b$ sont deux entiers tels que $1 \leqslant a \leqslant 6$ et $1 \leqslant b \leqslant 6$.

Le nombre de résultats possibles est $6 \times 6 = 36$ (et pas $\binom{12}{2}$ !).

1°) Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité, c'est-à-dire que l'expérience aléatoire peut être modélisée par une loi d'équiprobabilité *P*.

$X$ peut prendre les valeurs $x_1 = 350$ et $x_2 = -10$.

$$P(X = x_1) = P(\text{« obtenir un double-six »})$$
$$= \frac{1}{36} \quad \text{(il y a un seul résultat possible)}$$

$$P(X = x_2) = 1 - P(X = x_1)$$
$$= \frac{35}{36}$$

| $x_i$ | 350 | – 10 |
|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{35}{36}$ |

2°)

• **Calculons l'espérance de *X*.**

$$E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) \qquad \left(\text{on peut écrire } E(X) = \sum_{i=1}^{i=2} x_i \times P(X = x_i)\right)$$

$$= \frac{350}{36} - 10 \times \frac{35}{36}$$
$$= 0$$

On peut donc dire que le jeu est **équitable** ou **honnête**.

• **Calculons la variance de *X*.**

$$V(X) = 350^2 \times \frac{1}{36} + (-10)^2 \times \frac{35}{36} - 0^2 \qquad \text{(formule de König-Huygens)}$$

$$= \frac{122500}{36} + \frac{3500}{36}$$
$$= \frac{126\,000}{36}$$
$$= 3500$$

**• Calculons l'écart-type de *X*.**

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$$
$$=\sqrt{3500}$$
$$=10\sqrt{35}$$

## $\boxed{6}$ Variables indépendantes

| **Valeurs de *X*** | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

| **Valeurs de *Y*** | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| **Probabilité** | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |

On dresse un tableau à double entrée en mettant dans les cases les valeurs de $X+Y$ (« durée du travail »).

| ***Y*** \ ***X*** | **1** | **2** | **3** |
|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | 4 |
| **2** | **3** | 4 | 5 |
| **3** | 4 | 5 | 6 |
| **4** | 5 | 6 | 7 |

En rouge, les valeurs du temps de travail inférieures ou égales à 3.

On se place dans un univers probabilisé (Ω, *P*).

On observe que $\text{E}=\underbrace{\big((X=1)\cap(Y=1)\big)}_{\text{E}_1}\cup\underbrace{\big((X=1)\cap(Y=2)\big)}_{\text{E}_2}\cup\underbrace{\big((X=2)\cap(Y=1)\big)}_{\text{E}_3}$.

Les événements $\text{E}_1$, $\text{E}_2$, $\text{E}_3$ sont deux à deux incompatibles donc

$$P(\text{E})=P(\text{E}_1)+P(\text{E}_2)+P(\text{E}_3)$$
$$=P\big((X=1)\cap(Y=1)\big)+P\big((X=1)\cap(Y=2)\big)+P\big((X=2)\cap(Y=1)\big)$$

On utilise que *X* et *Y* sont indépendantes pour la probabilité *P*.

$$=P(X=1)\times P(Y=1)+P(X=1)\times P(Y=2)+P(X=2)\times P(Y=1)$$
$$=0{,}2\times 0{,}2+0{,}2\times 0{,}3+0{,}5\times 0{,}2$$
$$=0{,}2\times(0{,}2+0{,}3+0{,}5)$$
$$=0{,}2\times 1$$
$$=0{,}2$$

**La probabilité de l'événement E est égale à 0,2.**

Il n'y a pas à faire un arbre.