

Équations différentielles (3) Équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ (a et b constantes)

I. Résolution

1°) Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($(a; b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$) sont les fonctions f définies sur

\mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ($k \in \mathbb{R}$).

2°) Démonstration

1^{ère} méthode :

Prérequis : résolution des équations différentielles de la forme $Y' = mY$

$y' = ay + b$ (E) ($(a; b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 0$)

$$(E) \Leftrightarrow y' = a \underbrace{\left(y + \frac{b}{a} \right)}_Y$$

On pose : $Y = y + \frac{b}{a}$.
constante

y est dérivable sur \mathbb{R} donc Y est dérivable sur \mathbb{R} .

On a : $Y' = y'$.

(E) s'écrit donc $Y' = aY$.

D'après le théorème fondamental, les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions F définies sur \mathbb{R} par $F(x) = ke^{ax}$ ($k \in \mathbb{R}$).

On a : $y = Y - \frac{b}{a}$.

Dans les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Vocabulaire : k est appelé un **paramètre**.

2^e méthode :

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - af(x) = b$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad e^{-ax} \times f'(x) + (-ae^{-ax}) \times f(x) = be^{-ax}$$

On multiplie les deux membres de l'égalité par e^{-ax} , on a bien équivalence car e^{-ax} est non nul.

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad [f(x) \times e^{-ax}]' = be^{-ax}$$

On observe que $e^{-ax} \times f'(x) + (-ae^{-ax}) \times f(x)$ est l'expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-ax} \times f(x)$ (dérivée d'un produit).

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times e^{-ax} = -\frac{b}{a}e^{-ax} + k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -\frac{b}{a} + k \frac{k}{e^{-ax}}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

On utilise la propriété $\frac{1}{e^{-ax}} = e^{ax}$.

On a bien raisonné par équivalences.

3°) Exercice

Résoudre (intégrer) l'équation différentielle $y' = 2y + 1$ (E).

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 2$ et $b = 1$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur \mathbb{R} par $f(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$ ($k \in \mathbb{R}$).

4°) Bêtise à ne pas faire

Ne pas utiliser la formule lorsque a et b ne sont pas de constantes.

Exemple : $y' = 2y + 3x$

Ne pas appliquer le théorème.

II. Solution prenant une valeur donnée (problème de Cauchy)

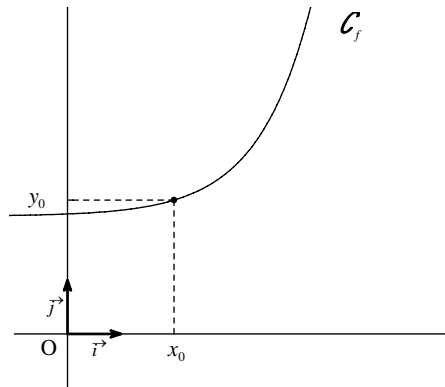
Cauchy : mathématicien français du XIX^e siècle

1°) Théorème

a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$.

Pour tout couple $(x_0; y_0)$ de réels, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ telle que $f(x_0) = y_0$.

2°) Interprétation graphique



Il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle dont la courbe représentative par le point de coordonnées $(x_0; y_0)$.

3°) Démonstration (ROC)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a} \quad (k \in \mathbb{R})$$

On cherche k tel que $f(x_0) = y_0$ (1).

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0 \\ &\Leftrightarrow ke^{ax_0} = y_0 + \frac{b}{a} \\ &\Leftrightarrow k = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{-ax_0} \end{aligned}$$

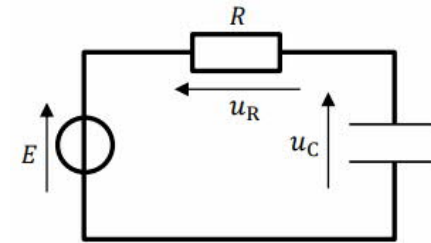
k existe et est unique donc f existe et est unique.

La solution cherchée est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \left(y_0 + \frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$.

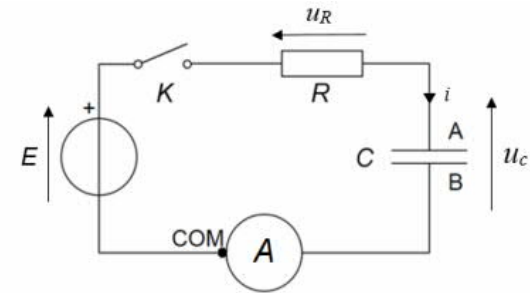
III. Équations différentielles en physique : circuit RC série en électricité

charge d'un condensateur (condensateur de capacité C et résistance R montés en série).

2023-NelleCaledo-J1-Exo3-Sujet-RCHumidite



T spé Sujet de bac physique-chimie-2021-centres-etranger-1-sujet-officiel



<https://www.sujetdebac.fr/Annales-pdf/2023/spe-physique-chimie-2023-metropole-2-sujet-officiel.pdf>

modélisation d'un détecteur capacitif d'humidité

On pose : $u = u_C$.

u_C est une fonction qui dépend du temps t .

$$t \in [0; +\infty[$$

On suppose que la fonction u_C dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On établit l'équation différentielle $\textcircled{RC} \frac{du_C}{dt} + u_C = E$

τ
constante de temps

avec la condition initiale $u_C(0) = 0$.

L'équation différentielle s'écrit $\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ ou encore $\frac{du_C}{dt} = -\frac{1}{\tau}u_C + \frac{E}{\tau}$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -\frac{1}{\tau}$ et $b = \frac{E}{\tau}$.

Donc $u_C(t) = ke^{-\frac{t}{\tau}} + E$ ($k \in \mathbb{R}$).

On se place dans le cas d'une charge.

k est déterminé par la condition initiale $u_C(0) = 0$ donc $0 = k + E$ d'où $k = -E$.

On obtient donc $u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$.

Commentaire :

En physique, on a ce que l'on appelle des « conditions aux limites » ce que l'on n'a pas en mathématiques.

Cette expression permet de voir que u_C est strictement croissante $[0; +\infty[$ (par exemple par dérivation).

On a $e^{-\frac{t}{\tau}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ (car $\tau > 0$ donc $-\frac{1}{\tau} < 0$) donc $u_C(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} E$.

On considère la représentation graphique de u_C en fonction de t .

Elle admet la droite d'équation $y = E$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

Application : Détermination graphique de la constante de temps par la méthode de la tangente.

On considère la représentation graphique de u_C en fonction de t .

Cette courbe passe par l'origine et la tangente en ce point et la tangente T en ce point a pour équation $y = \frac{E}{\tau}t$ (démonstration très facile).

Pour avoir l'abscisse du point d'intersection de T avec la droite d'équation $y = E$, on résout l'équation

$$\frac{E}{\tau}t = E.$$

On trouve $t = \tau$.

Autre méthode pour déterminer la constante de temps :

On calcule $u_C(\tau) = E \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\tau}} \right) = E(1 - e^{-1})$.

Avec la calculatrice, on obtient $1 - e^{-1} = 0,632120\dots$

$$u_C(\tau) \approx 0,63E$$

Régime transitoire-régime stationnaire

$$u_C(5\tau) = E \left(1 - e^{-\frac{5\tau}{\tau}} \right) = E(1 - e^{-5})$$

Avec la calculatrice, on obtient $1 - e^{-5} = 0,993262\dots$

Pour $t \geq 5\tau$, on peut considérer que $u_C(t)$ est « égal » à E à moins de 1 %.

On peut considérer que la tension est constante, ce qui revient à considérer que la courbe représentative est confondue avec l'asymptote horizontale.

De 0 à 5τ , on dit que l'on est en régime transitoire.

À partir de 5τ , on dit que l'on est en régime stationnaire.

Idem pour la décharge.

Dans ce cas, on obtient $u_C(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$.