TS3 **Devoir pour le lundi 11 janvier 2010**

À rédiger sur une copie à petits carreaux (le graphique de l'exercice I sera à faire sur la copie).

I.

PARTIE A : Étude d'une fonction auxiliaire *g*.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^x(1-x)+1$.

1°) Dresser le tableau de variation de g.

2°) Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

3°) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ (E) possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

4°) Déterminer à l'aide de la calculatrice un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

5°) Déterminer le signe de $g(x)$.

PARTIE B : Étude d'une fonction *f*.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x+1}+2$.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

2°) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=x+2$ pour asymptote oblique.

c) Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

3°) a) Démontrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Déterminer deux entiers p et q tels que $f(\alpha)=p\alpha+q$.

En déduire une valeur approchée au dixième de $f(\alpha)$.

5°) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous en utilisant la calculatrice :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

Pour les valeurs de $f(x)$, on donnera le cas échéant des valeurs arrondies au centième.

Tracer la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ et la tangente horizontale et la tangente au point A d'abscisse 0.
On prendra pour unités 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée (ou 1 « gros » carreau en abscisse et 2 « gros » carreaux en ordonnée).
Vérifier le tracé à l'aide d'une calculatrice graphique ou sur ordinateur à l'aide d'un logiciel de tracés de courbes.

6°) Soit B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $-\alpha$.

Calculer l'ordonnée de B et démontrer que la tangente T à $\mathcal{C}$ au point B est parallèle à Δ.

7°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ (F) admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.

Le but des exercices II et III est de démontrer des formules sommatoires.

II. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} p\times p! = (n+1)!-1$.

III. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p(p+1)}$.

1°) Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.

2°) Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n sous la forme d'un seul quotient.

Démontrer cette conjecture.

TS3

Corrigé du devoir pour le 11 janvier 2010

I. Partie A

1°) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = -xe^x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $g'(x)$		+	0	–	
Variations de g	1	↗	2	↘	$-\infty$

$g(0) = e^0 + 1 = 2$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(1-x)\right] = 1$.

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

En $-\infty$, on rencontre une forme indéterminée. On doit transformer l'écriture de $g(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x + 1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-xe^x\right) = 0 \ \text{ (limite de référence)}\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$.

2°) La fonction g est minorée par 1 sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

De plus, g est continue sur $\mathbb{R}$ donc par restriction sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

$g(0) = 2$

Le corollaire du TVI s'applique.

On a donc $g\left([0\,;+\infty[\right) = \left]-\infty\,;2\right]$.

Comme $0 \in \left]-\infty\,;2\right]$, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

4°) En utilisant la calculatrice, on obtient : $\alpha = 1{,}278464...$ (on trace la représentation graphique puis on utilise le « solveur d'équations » sur la calculatrice).

On en déduit que : $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

Remarque : au bac, il vaut mieux calculer $g(1{,}27)$ et $g(1{,}28)$.

On observe que $g(1{,}27) > 0$ et que $g(1{,}28) < 0$. On en déduit que $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

5°)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
SGN de $g(x)$		+	0	–	

Partie B

1°) En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

On doit transformer l'écriture de $f(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $f(x) = \dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}} + 2$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{(limite de référence)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}$$ donc par limite d'une somme, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x} + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$.

Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

On en déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y = 2$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2°) a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x + 1\right) = 1\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{e^x + 1}\right) = -\infty$.

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) - (x+2) = \dfrac{x}{e^x+1} - x = -\dfrac{xe^x}{e^x+1}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^{x}\right)=0 \text{ (limite de référence)}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x}+1\right)=1\end{array}\right\}\text{ donc par limite d'un quotient, on a : } \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0.$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y=x+2$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
SGN de $f(x)-(x-2)$		+	0	–	

Donc :

- $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$;
- $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$;
- $\mathcal{C}$ et Δ sont sécantes au point d'abscisse 0.

3°) a) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les règles d'opérations algébriques sur les fonctions dérivables.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=\dfrac{e^{x}(1-x)+1}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=\dfrac{g(x)}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}$.

b)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
SGN de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	2

4°) On sait que $g(\alpha)=0$ donc $e^{\alpha}(1-\alpha)+1=0$.

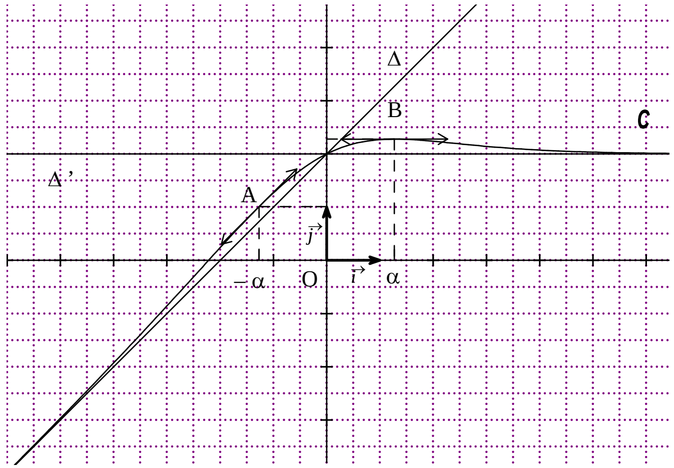
Donc $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ (on sait que $\alpha\neq1$).

Par suite, on a : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^{\alpha}+1}+2=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}+2=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\cancel{1}+\alpha\cancel{-1}}{\alpha-1}}+2=\dfrac{\cancel{\alpha}}{\dfrac{\cancel{\alpha}}{\alpha-1}}+2=\alpha-1+2=\alpha+1$

5°) La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α est horizontale.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{2}$.

x	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	– 2,97	– 1,93	– 0,86	0,24	1,27	2	2,27	2,24	2,14	2,07	2,03



6°) On a : $f(-\alpha)=\dfrac{-\alpha}{e^{-\alpha}+1}+2$

Or $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ d'où $e^{-\alpha}=\alpha-1$

D'où $f(-\alpha)=\dfrac{-\alpha}{\alpha\cancel{-1}\cancel{+1}}+2=-1+2=1$

L'ordonnée du point B est donc égale à 1.

$f'(-\alpha)=\dfrac{e^{-\alpha}(1+\alpha)+1}{\left(e^{-\alpha}+1\right)^{2}}$

On a : $e^{-\alpha}=\alpha-1$

$f'(-\alpha)=\dfrac{(\alpha-1)(1+\alpha)+1}{(\alpha-1+1)^{2}}=\dfrac{\alpha^{2}}{\alpha^{2}}=1.$

Or Δ a pour coefficient directeur 1 donc la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point B est parallèle à Δ.

7°) On applique le corollaire du TVI.
Grâce à la calculatrice, on obtient : $x_0=-2,21771...$
La courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses au point C d'abscisse x_0.

II. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a : $\sum_{p=0}^{p=n} p\times p! = (n+1)!-1$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $\sum_{p=0}^{p=n} p\times p! = (n+1)!-1$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

$\sum_{p=0}^{p=0} p\times p! = 0\times 0! = 0$.

$(0+1)!-1 = 1!-1 = 1-1 = 0$

$\sum_{p=0}^{p=0} p\times p! = (0+1)!-1$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel $k\geq 1$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $\sum_{p=0}^{p=k} p\times p! = (k+1)!-1$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $\sum_{p=0}^{p=k+1} p\times p! = (k+2)!-1$.

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{p=k+1} p\times p! &= \sum_{p=0}^{p=k} p\times p! + (k+1)\times(k+1)!\\ &= (k+1)!-1+(k+1)\times(k+1)!\\ &= (k+1)!+(k+1)\times(k+1)!-1\\ &= (k+1)!\left[1+(k+1)\right]-1\\ &= (k+1)!(k+2)-1\\ &= (k+2)!-1\end{aligned}$$

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

III. $S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p(p+1)}$

1°) $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{2}{3}$, $S_3 = \frac{3}{4}$, $S_4 = \frac{4}{5}$.

2°) On peut conjecturer que pour tout entier naturel *n*, on a : $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Démontrons cette conjecture par récurrence.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on définit la phrase $P(n)$: « $S_n = \frac{n}{n+1}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(1)$ est vraie.

$S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$.

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel $k\geq 1$ tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $S_k = \frac{k}{k+1}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

$$\begin{aligned}S_{k+1} &= \sum_{p=1}^{p=k+1} \frac{1}{p(p+1)}\\ &= \sum_{p=1}^{p=k} \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}\\ &= \frac{k+1}{k+2}\end{aligned}$$

Conclusion :

On a démontré que $P(1)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel $k\geq 1$, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.