T spé

Exercices sur les équations différentielles (2)

1 On considère l'équation différentielle $y'+2y=x^2$ (E).

Déterminer trois réels *a*, *b*, *c* tels que la fonction *u* définie par $u(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution particulière de (E).

2 On considère l'équation différentielle $y'+y=x$ (E).

1°) Déterminer deux réels *m* et *p* tels que la fonction affine *u* définie par $u(x)=mx+p$ soit une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

3°) En déduire toutes les solutions de (E).

Vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

3 On considère l'équation différentielle $y'-2y=8x^2-8x$ (E).

1°) Vérifier que la fonction *u* définie par $u(x)=-4x^2$ est une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

3°) En déduire toutes les solutions de (E).

Vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

4 On considère l'équation différentielle $y'+3y=4\mathrm{e}^{-2x}$ (E).

1°) Déterminer un réel λ tel que la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\lambda\mathrm{e}^{-2x}$ soit une solution particulière de (E).

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

3°) En déduire toutes les solutions de (E).

Vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

Corrigé

1

$y'+2y=x^2$ (E)

Déterminons trois réels *a*, *b*, *c* tels que la fonction *u* définie par $u(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=2ax+b$

u est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)+2u(x)=x^2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad (2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad 2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=x^2$

(on a développé et regroupé les termes semblables)

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases}$ (car $x^2=1x^2+0x+0$; on identifie les coefficients*)

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

* Théorème d'égalité de deux polynômes :

Des polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et leurs coefficients des termes de même degré sont égaux.

Conclusion : La fonction *u* définie par $u(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$

$y'+y=x \quad (\text{E})$

Le but de l'exercice est de résoudre (E) (c'est un point à bien comprendre).

1°) Déterminons deux réels m et p tels que la fonction affine u définie par $u(x)=mx+p$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=m$

$$\begin{aligned} u \text{ est solution de } (\text{E}) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)+u(x)=x \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad m+(mx+p)=x \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad \boxed{m}\,x+\boxed{m+p}=\boxed{1}\,x+\boxed{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 & (\text{coefficient de } x) \\ m+p=0 & (\text{coefficient constant}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ p=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : La fonction affine u définie par $u(x)=x-1$ est une solution particulière de (E).

Remarque : Quand on commence la recherche avec les équivalences, on ne met pas le mot « particulière » mais on le met dans la conclusion.

On applique le principe d'égalité de deux polynômes : « Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des monômes de même degré sont égaux. »

2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit $y'+y=0$ qui est équivalente à $y'=-y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-1$.

Les solutions de (E_0) sont donc les fonctions $x\mapsto k\text{e}^{-x}$ $(k\in\mathbb{R})$ [théorème du cours donnant les solutions d'une équation différentielle de la forme $y'=ay$].

3°) En déduire toutes les solutions de (E).
Vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

(E) est une équation différentielle de la forme $y'+ay=b(x)$, où a est un réel et b une fonction.

(E_0) est l'équation homogène associée à (E).

D'après la question 1°), u est une solution particulière de (E).

On sait que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée (propriété du cours).

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions $f: x\mapsto x-1+k\text{e}^{-x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

Dans le supérieur, on verra une méthode de résolution efficace de (E) : la « variation de la constante ».

On peut représenter sur l'écran de la calculatrice les courbes représentatives de plusieurs solutions (E) en donnant à k différentes valeurs.

Pour $k=0$, on retrouve la solution particulière u.

On pourrait vérifier la résolution avec le site dcode.

$\boxed{3}$

$y'-2y=8x^2-8x \quad (\text{E})$

1°) Vérifions que la fonction u définie par $u(x)=-4x^2$ est une solution particulière de (E).

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme fonction polynôme).

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=-8x$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)-2u(x)=8x^2-8x$

Donc la fonction u est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit $y'-2y=0$ soit $y'=2y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=2$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\text{e}^{2x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

3°) (E) est une équation différentielle de la forme $y'+ay=b(x)$, où a est un réel et b une fonction.

$(\mathrm{E_0})$ est l'équation homogène associée à (E).

D'après la question 1°), u est une solution particulière de (E).

On sait que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée (propriété du cours).

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} - 4x^2$ $(k \in \mathbb{R})$.

$\boxed{4}$

$y'+3y=4\mathrm{e}^{-2x}$ (E)

1°) Déterminons un réel λ tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\lambda\mathrm{e}^{-2x}$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par un réel.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -2\lambda\mathrm{e}^{-2x}$

u est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x)+3u(x)=4\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad -2\lambda\mathrm{e}^{-2x}+3\lambda\mathrm{e}^{-2x}=4\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda\mathrm{e}^{-2x}=4\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow \lambda = 4$

Conclusion : La fonction u définie par $u(x)=4\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle homogène associée $(\mathrm{E_0})$.

L'équation homogène associée $(\mathrm{E_0})$ s'écrit : $y'+3y=0$ soit $y'=-3y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-3$.
Les solutions de $(\mathrm{E_0})$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-3x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

3°) (E) est une équation différentielle de la forme $y'+ay=b(x)$, où a est un réel et b une fonction.

$(\mathrm{E_0})$ est l'équation homogène associée à (E).

D'après la question 1°), u est une solution particulière de (E).

On sait que les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution particulière aux solutions de l'équation homogène associée (propriété du cours).

On en déduit que les solutions de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto 4\mathrm{e}^{-2x} + k\mathrm{e}^{-3x}$ $(k \in \mathbb{R})$.

Ancienne version (Terminale S)

$\boxed{1}$ On considère l'équation différentielle $y'+2y=x^2$ (E).
Déterminer trois réels a, b, c tels que la fonction u définie par $u(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$ On considère l'équation différentielle $y'+y=x$ (E).
1°) Déterminer deux réels m et p tels que la fonction affine u définie par $u(x)=mx+p$ soit une solution particulière de (E).
2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée $(\mathrm{E_0})$.
3°) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer l'équivalence suivante : « v est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de $(\mathrm{E_0})$ ».
En déduire les solutions de (E).
Vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

$\boxed{3}$ On considère l'équation différentielle $y'-2y=8x^2-8x$ (E).
1°) Vérifier que la fonction u définie par $u(x)=-4x^2$ est une solution particulière de (E).
2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée $(\mathrm{E_0})$.
3°) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer l'équivalence suivante : « v est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de $(\mathrm{E_0})$ ».
En déduire les solutions de (E).
Vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

$\boxed{4}$ On considère l'équation différentielle $y'+3y=4\mathrm{e}^{-2x}$ (E).
1°) Déterminer un réel λ tel que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\lambda\mathrm{e}^{-2x}$ soit une solution particulière de (E).
2°) Résoudre l'équation différentielle homogène associée $(\mathrm{E_0})$.
3°) Soit v une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Démontrer l'équivalence suivante : « v est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de $(\mathrm{E_0})$ ».
En déduire les solutions de (E).
Vérifier avec le site dcode (rubrique « équations différentielles »).

Réponses

$\boxed{1}$ Attention à la rédaction. $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{2}$; $c=\frac{1}{4}$.

$\boxed{2}$ 1°) $u(x)=x-1$; 3°) $v(x)=k\mathrm{e}^{-x}+x-1$ $(k\in\mathbb{R})$

$\boxed{3}$ 3°) $v(x)=k\mathrm{e}^{2x}-4x^2$ $(k\in\mathbb{R})$

$\boxed{4}$ 1°) $\lambda=4$; 3°) $v(x)=k\mathrm{e}^{-3x}+4\mathrm{e}^{-2x}$ $(k\in\mathbb{R})$

Remarque sur les exercices $\boxed{2}$ à $\boxed{4}$:
Il n'y a pas besoin d'apprendre la méthode en terminale ; la méthode sera redétaillée à chaque fois.

Solutions détaillées

$\boxed{1}$

$y'+2y=x^2$ (E)

Déterminons trois réels *a*, *b*, *c* tels que la fonction *u* définie par $u(x)=ax^2+bx+c$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=2ax+b$

u est solution de (E) $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)+2u(x)=x^2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad (2ax+b)+2(ax^2+bx+c)=x^2$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad 2ax^2+(2a+2b)x+b+2c=x^2$

(on a développé et regroupé les termes semblables)

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a=1\\2a+2b=0\\b+2c=0\end{cases}$ (car $x^2=1x^2+0x+0$; on identifie les coefficients*)

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{2}\\c=\frac{1}{4}\end{cases}$

* Théorème d'égalité de deux polynômes :

Des polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et leurs coefficients des termes de même degré sont égaux.

Conclusion : La fonction *u* définie par $u(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E).

$\boxed{2}$

$y'+y=x \quad (\mathrm{E})$

Le but de l'exercice est de résoudre (E) (c'est un point à bien comprendre).

1°) Déterminons deux réels m et p tels que la fonction affine u définie par $u(x)=mx+p$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=m$

$$
\begin{aligned}
u \text{ est solution de } (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)+u(x)=x\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad m+(mx+p)=x\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad \boxed{m}\,x+\boxed{m+p}=\boxed{1}\,x+\boxed{0}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 & (\text{coefficient de } x)\\ m+p=0 & (\text{coefficient constant})\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} m=1\\ p=-1\end{cases}
\end{aligned}
$$

Conclusion : La fonction affine u définie par $u(x)=x-1$ est une solution particulière de (E).

Remarque : Quand on commence la recherche avec les équivalences, on ne met pas le mot « particulière » mais on le met dans la conclusion.

On applique le principe d'égalité de deux polynômes : « Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients des monômes de même degré sont égaux. »

2°) Cette question est indépendante de la précédente.

Résolvons l'équation différentielle homogène associée (E_0).

L'équation homogène associée (E_0) s'écrit $y'+y=0$ soit $y'=-y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-1$ (chapitre « Équations différentielles (1) ».

Les solutions de (E_0) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})$.

3°) v est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que v est solution de $(\mathrm{E}) \Leftrightarrow v-u$ est solution de (E_0).

Commentaire : C'est la partie la plus abstraite.

$$
\begin{aligned}
v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (v-u)'(x)+(v-u)(x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)-u'(x)+v(x)-u(x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)+v(x)=\underbrace{u'(x)+u(x)}_{}
\end{aligned}
$$

u est solution particulière de (E)

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v'(x)+v(x)=x\\
&\Leftrightarrow v \text{ est solution de } (\mathrm{E})
\end{aligned}
$$

Déduisons-en les solutions de (E).

Rappel : Le but de l'exercice est de résoudre (E) d'où l'importance de cette dernière étape.

$$
\begin{aligned}
v \text{ est solution de } (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E}_0)\\
&\Leftrightarrow v-u \text{ est définie par } (v-u)(x)=k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})\\
&\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

u est la solution particulière de (E) trouvée précédemment

$$
\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad v(x)=x-1+k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})
$$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=x-1+k\mathrm{e}^{-x} \quad (k\in\mathbb{R})$.

Remarque :

On a démontré dans la question 1°) que la fonction u définie par $u(x)=x-1$ est une solution particulière de (E).

On peut observer que la fonction u est la solution de (E) pour $k=0$.

$\boxed{3}$

$y'-2y=8x^2-8x \quad (\mathrm{E})$

1°) Vérifions que la fonction u définie par $u(x)=-4x^2$ est une solution particulière de (E).

La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme fonction polynôme).

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)=-8x$

$\forall x\in\mathbb{R} \quad u'(x)-2u(x)=8x^2-8x$

Donc la fonction u est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle homogène associée $(\mathrm{E_0})$.

L'équation homogène associée $(\mathrm{E_0})$ s'écrit $y'-2y=0$ soit $y'=2y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=2$.
Les solutions de $(\mathrm{E_0})$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{2x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

3°) Soit *v* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que *v* est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de $(\mathrm{E_0})$.

$$\begin{aligned} v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E_0}) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad (v-u)'(x)-2(v-u)(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-u'(x)-2v(x)+2u(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-2v(x)=u'(x)-2u(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-2v(x)=8x^2-8x \\ &\Leftrightarrow v \text{ est solution de } (\mathrm{E}) \end{aligned}$$

Déduisons-en les solutions de (E).

$$\begin{aligned} v \text{ est solution de } (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E_0}) \\ &\Leftrightarrow v-u \text{ est définie par } (v-u)(x)=k\mathrm{e}^{2x}\quad (k\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{2x}\quad (k\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{2x}\quad (k\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)=-4x^2+k\mathrm{e}^{2x}\quad (k\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions *v* définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=k\mathrm{e}^{2x}-4x^2$ $(k\in\mathbb{R})$.

$\boxed{4}$

$y'+3y=4\mathrm{e}^{-2x}$ (E)

1°) Déterminons un réel λ tel que la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=\lambda\mathrm{e}^{-2x}$ soit une solution particulière de (E).

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par un réel.
$\forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)=-2\lambda\mathrm{e}^{-2x}$

$$\begin{aligned} u \text{ est solution de } (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)+3u(x)=4\mathrm{e}^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad -2\lambda\mathrm{e}^{-2x}+3\lambda\mathrm{e}^{-2x}=4\mathrm{e}^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad \lambda\mathrm{e}^{-2x}=4\mathrm{e}^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \lambda=4 \end{aligned}$$

Conclusion : La fonction *u* définie par $u(x)=4\mathrm{e}^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

2°) Résolvons l'équation différentielle homogène associée $(\mathrm{E_0})$.

L'équation homogène associée $(\mathrm{E_0})$ s'écrit : $y'+3y=0$ soit $y'=-3y$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay$ avec $a=-3$.
Les solutions de $(\mathrm{E_0})$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=k\mathrm{e}^{-3x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

3°) *v* est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrons que *v* est solution de (E) $\Leftrightarrow$ $v-u$ est solution de $(\mathrm{E_0})$.

$$\begin{aligned} v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E_0}) &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad (v-u)'(x)+3(v-u)(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-u'(x)+3v(x)-3u(x)=0 \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)+3v(x)=\underbrace{u'(x)+3u(x)}_{u \text{ est solution particulière de } (\mathrm{E})} \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)+3v(x)=4\mathrm{e}^{-2x} \\ &\Leftrightarrow v \text{ est solution de } (\mathrm{E}) \end{aligned}$$

Déduisons-en les solutions de (E).

$$\begin{aligned} v \text{ est solution de } (\mathrm{E}) &\Leftrightarrow v-u \text{ est solution de } (\mathrm{E_0}) \\ &\Leftrightarrow v-u \text{ est définie par } (v-u)(x)=k\mathrm{e}^{-3x}\quad (k\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)-u(x)=k\mathrm{e}^{-3x}\quad (k\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)=u(x)+k\mathrm{e}^{-3x}\quad (k\in\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v(x)=4\mathrm{e}^{-2x}+k\mathrm{e}^{-3x}\quad (k\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Conclusion : Les solutions de (E) sont les fonctions *v* définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=4\mathrm{e}^{-2x}+k\mathrm{e}^{-3x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

Remarque générale : rédaction en analyse

Parler d'une fonction.

« La fonction u définie par … est solution de (E). » et non « La fonction $u(x)$ définie par … est solution de (E) ».