TS3

Devoir pour le mardi 5 janvier 2010

I. Soit p un entier naturel supérieure ou égale à 2. On note A_p l'ensemble des entiers naturels dont l'écriture contient exactement p chiffres et B_p l'ensemble des entiers dont l'écriture contient exactement p chiffres autres que 0.

Remarque : B_p est un sous-ensemble de A_p.

1°) Exprimer en fonction de p le cardinal des ensembles A_p et B_p.

2°) Parmi les entiers naturels inférieurs ou égaux à un milliard quel est le pourcentage de ceux qui contiennent le chiffre 0 dans leur écriture ?

II. On tire deux cartes au hasard simultanément d'un jeu de trente-deux cartes.
On désire calculer le nombre de résultats possibles contenant au moins un roi.

On va étudier deux solutions justes (les solutions 1 et 2) puis une solution erronée (mais tentante).

Solution 1

Calculer le nombre total de tirages de deux cartes.
Calculer le nombre total de tirages ne contenant aucun roi.
En déduire le nombre de tirages contenant au moins un roi.

Solution 2

Calculer le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement un roi.
Calculer le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement deux rois.
En déduire le nombre de tirages contenant au moins un roi.

Etude d'une solution erronée

On utilise le raisonnement suivant : pour former un tirage contenant au moins un roi, on choisit d'abord une carte parmi les quatre rois puis on choisit une carte parmi les 31 cartes restantes.

Cela se traduit par le calcul $\binom{4}{1}\times\binom{31}{1}$.

Effectuer le calcul précédent pour constater que le résultat obtenu est supérieur au résultat trouvé avec les deux méthodes précédentes.
Il y a donc une erreur. Pourtant le raisonnement semble juste ! Où est l'erreur ?
Avec le raisonnement précédent, on compte plusieurs fois le même cas.
En effet, avec le raisonnement précédent il se peut très bien que l'on choisisse d'abord le roi de cœur pour la première carte puis le roi de carreau pour la deuxième carte.
Mais cela revient au même que la démarche qui consiste à choisir d'abord le roi de carreau puis ensuite le roi de cœur.

III. On se propose de calculer le nombre de mains de cinq cartes d'un jeu de trente-deux cartes qui contiennent au moins un roi par deux méthodes différentes.

1ère méthode :

Calculer le nombre total de mains de cinq cartes ; calculer le nombre de mains de cinq cartes qui ne contiennent aucun roi.
En déduire le nombre total de mains de cinq cartes qui contiennent au moins un roi.

2e méthode :

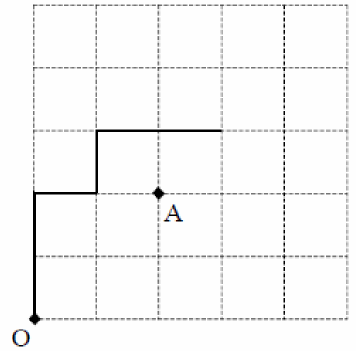
Calculer le nombre de mains de cinq cartes
- qui contiennent exactement un roi
- qui contiennent exactement deux rois
- qui contiennent exactement trois rois
- qui contiennent exactement quatre rois

En déduire le nombre total de mains de cinq cartes qui contiennent au moins un roi.

IV. 1°) Trois personnes s'installent autour d'une table circulaire. Représenter sur un dessin toutes les dispositions possibles ; en déduire le nombre de dispositions possibles autour de la table.
2°) Reprendre la question précédente avec quatre personnes.
3°) Déterminer le nombre de dispositions possibles de n personnes (n entier naturel supérieur ou égal à 3) autour d'une table circulaire.
Indication : on observera que pour faire une disposition circulaire, on peut fixer la place d'une personne qui sert de repère.

V. Chemins monotones

On se déplace sur le quadrillage ci-contre.
Chaque chemin part de O et est constitué uniquement de « pas » vers la droite notés D ou de « pas » vers le haut notés H.
Par exemple HHHDHDD permet de coder un chemin de 7 "pas" et le chemin HHDHDD de 6 « pas » est représenté sur le dessin.
1°) Combien y a-t-il de chemins de 4 « pas » ?
2°) Combien y a-t-il de chemins de 5 « pas » passant par A ?
3°) Combien y a-t-il de chemins de 6 « pas » passant par A composés en tout de 4 H et 2 D ? (peu importe l'ordre)



VI. On se propose de démontrer que, pour tout entier naturel n, $n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.

1°) Vérification pour des valeurs particulières de n

Vérifier cette propriété pour $n\in\{0;1;2;3;4;5\}$.

2°) Démonstration

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Démontrer que l'on a : $n\binom{2n}{n}=(n+1)\binom{2n}{n+1}$.

En écrivant cette relation sous la forme : $(n+1)\left[\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n+1}\right]=\binom{2n}{n}$, démontrer le résultat demandé.

TS 3

Correction du devoir pour le mardi 5 janvier 2010

I. 1°) card $A_p = 9\times 10^{p-1}$ (9 choix pour le 1[er] chiffre puis 10 choix pour chacun des chiffres suivants)

card $B_p = 9^p$ (9 choix pour chacun des chiffres)

2°) un milliard = 10^9 =1 000 000 000
Il y a 1 000 000 001 entiers inférieurs ou égaux à un milliard.

On note C_p l'ensemble des nombres entiers naturels de *p* chiffres qui contiennent au moins un 0 dans leur écriture.

card $C_1 = 1$ (le seul nombre entier naturel de 1 chiffre qui contient au moins un 0 dans son écriture décimale est 0)

Pour $p \geq 2$, on a :
card C_p = card A_p – card B_p = $9\times 10^{p-1} - 9^p$
Le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à un milliard qui contiennent le chiffre 0 dans leur écriture est égal à :

$$\text{card } C_1 + \text{card } C_2 + \ldots + \text{card } C_9 + \underset{\uparrow}{1} = 1 + \sum_{p=2}^{9} 9\times 10^{p-1} - \sum_{p=2}^{9} 9^p + 1$$

pour compter le milliard

$$= 1 + 9\sum_{p=2}^{9} 10^{p-1} - \sum_{p=2}^{9} 9^p + 1$$

$$= 1 + 9\sum_{q=1}^{8} 10^{q} - \sum_{p=2}^{9} 9^p + 1$$

$$= 1 + \cancel{9}\times 10 \times \frac{10^8 - 1}{\cancel{9}} - 9^2 \times \frac{9^8 - 1}{9 - 1} + 1$$ (somme des termes de suites géométriques)

$$= 1 + 10^9 - 10 - 81\times \frac{9^8 - 1}{8} + 1$$

$$= 564\,151\,952$$

$$\frac{564\,151\,952}{1000\,000\,001}\times 100 = 56,415195\ldots$$

II.

<u>Solution 1</u>

Calculons le nombre total de tirages de deux cartes.

$$\binom{32}{2} = 496$$

Calculons le nombre total de tirages ne contenant aucun roi.

$$\binom{28}{2} = 378$$

Déduisons-en le nombre de tirages contenant au moins un roi.

On effectue la différence des deux résultats précédents.

496 – 378 = 118

<u>Solution 2</u>

Calculons le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement un roi.

On tire un roi parmi les quatre rois puis une autre carte parmi les autres cartes qui ne sont pas des rois.

$$\binom{4}{1}\times\binom{28}{1} = 4\times 28 = 112$$

Calculons le nombre total de tirages de deux cartes contenant exactement deux rois.

$$\binom{4}{2} = 6$$

Déduisons-en le nombre de tirages contenant au moins un roi.

On additionne les deux résultats précédents.
On trouve : $112 + 6 = 118$.

On retrouve le résultat obtenu dans la 1[ère] solution.

Etude d'une solution erronée

$$\binom{4}{1}\times\binom{31}{1} = 4\times 31 = 124.$$

Le nombre obtenu est supérieur à celui obtenu avec les solutions 1 et 2.

L'explication est fournie dans l'énoncé.

III. Une main de cinq cartes est une combinaison de cinq cartes. Il n'y a pas d'ordre

1ère méthode :

Nombre total de mains de cinq cartes : $\binom{32}{5} = 201\ 376$

Nombre de mains de cinq cartes qui ne contiennent aucun roi : $\binom{28}{5} = 98\ 280$

Nombre total de mains de cinq cartes qui contiennent au moins un roi : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103\ 096$

2e méthode :

Nombre de mains de cinq cartes

- qui contiennent exactement un roi : $\binom{4}{1} \times \binom{28}{4} = 4 \times 20475 = 81\ 900$
- qui contiennent exactement deux rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 6 \times 3276 = 19\ 656$
- qui contiennent exactement trois rois : $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 4 \times 378 = 1\ 512$
- qui contiennent exactement quatre rois $\binom{4}{4} \times \binom{28}{1} = 1 \times 28 = 28$

Nombre total de mains de cinq cartes qui contiennent au moins un roi : **103 096**.

On retrouve ainsi le résultat obtenu avec la première méthode.

IV.

1°) 2

2°) 6

3°) Pour faire une disposition circulaire, on peut fixer la place d'une personne qui sert de repère.
Les autres personnes ont alors $(n-1)!$ façons possibles de se placer.

Le nombre de dispositions possibles de n personnes autour d'une table est égal à $(n-1)!$.
Pour faire une disposition circulaire, on peut fixer la place d'une personne qui sert de repère.

V.

1°) Nombre de chemins de 4 "pas".

Il y a 2 choix possibles pour le 1er déplacement, 2 choix possibles pour le 2e déplacement, 2 choix possibles pour le 3e déplacement, 2 choix possibles pour le 4e déplacement.

On applique le principe multiplicatif.
Le nombre de chemins de 4 "pas" est égal à $2^4 = 16$.

2°) Nombre de chemins de 5 "pas" passant par A.

Un chemin de 5 "pas" partant de O passant par A est d'abord composé d'un chemin pour aller jusqu'à A (il faut faire 4 pas, 2 H et 2D dans n'importe quel ordre) puis un pas.

Le nombre de chemins partant de O pour aller jusqu'à A est égal au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 4.

Un tel chemin est déterminé par la place des deux D (les deux H prendront automatiquement les deux places restantes).

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \cancel{4}}{1 \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{2}} = 6$$

N.B. : On peut aussi dire que le nombre de chemins cherchés est égal au nombre d'anagrammes d'un mot de quatre lettres contenant deux fois la lettre H et deux fois la lettre D.

Pour le 5e pas, il y a deux choix possibles H ou D.

Donc le nombre de chemins de 5 "pas" passant par A est égal à $6 \times 2 = 12$.

3°) Nombre de chemins de 6 "pas" passant par A composés en tout de 4 H et 2 D.

Pour aller de O à A, on doit faire 4 pas : 2 H et 2D peu importe l'ordre.
Ensuite, on doit donc faire deux déplacements horizontaux.

Le nombre de chemins de 6 "pas" passant par A composés en tout de 4 H et 2 D est égal à : $6 \times 1 \times 1 = 6$.

VI.

1°) $n = 0$ $\binom{0}{0} = 1$ est divisible par 1

$n = 1$ $\binom{2}{1} = 2$ est divisible par 2

$n = 2$ $\binom{4}{2} = 6$ est divisible par 3

$n = 3$ $\binom{6}{3} = 20$ est divisible par 4

$n = 4$ $\binom{8}{4} = 70$ est divisible par 5

$n = 5$ $\binom{10}{5} = 252$ est divisible par 6

2°) Rappel

> Soit a et b deux entiers.
> On dit que a divise b pour exprimer qu'il existe une entier q tel que $a = bq$.

Démonstration

$$n\binom{2n}{n} = n \times \frac{(2n)!}{n! \times n!} = \cancel{n} \times \frac{(2n)!}{\cancel{n} \times (n-1)! \times n!} = \frac{(2n)!}{(n-1)! \times n!}.$$

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = (n+1)\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \cancel{(n+1)}\frac{(2n)!}{\cancel{(n+1)} \times n!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}$$

Donc on en déduit que l'on a : $n\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n+1}$.

Cette relation s'écrit aussi : $\left[(n+1)-1\right]\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n}{n+1}$ ce qui donne : $(n+1)\left[\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}\right] = \binom{2n}{n}$.

Or $(n+1)$ est un entier et $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$ est aussi un entier donc on en déduit que, pour tout entier naturel n,

$n+1$ divise $\binom{2n}{n}$.